풀이

STEP III 2013, 문제 8

순수수학 • 이차곡선의 극방정식

> **STEP III 2013, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q8

핵심 아이디어

$k < 1$인 관계식 $r = ks$는 E가 O를 초점(focus)으로, D를 준선(directrix)으로 하는 타원(ellipse)임을 뜻하며, O를 중심으로 하는 극좌표(polar coordinates)에서는 r를 θ로 나타내는 매우 간단한 방정식이 된다. O를 지나는 현(chord)은 서로 반대 방향을 향하는 두 동경일 뿐이므로, $1/l$은 $\cos^2\theta$에 대한 간단한 식으로 나온다. 그러면 같은 간격으로 놓인 n개의 직선에 대한 합은 $\cos 2\theta$ 항들의 합으로 바뀌는데, 이것이 바로 처음의 합이 처리해 주는 것이다.

풀이

처음의 합

각 항은 첫째항이 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$이고 공비(common ratio)가 $w = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$인 등비수열(geometric progression)을 이룬다. $n \geq 2$이므로 각 $2\pi/n$은 $(0, \pi]$에 속하고, 따라서 $w \neq 1$이어서 일반적인 공식을 쓸 수 있다.

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha + r\pi/n)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-w^n}{1-w} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}{1-w} = 0.$$

실수부(real part)를 취하면 $\sum_{r=0}^{n-1} \cos(2\alpha + 2r\pi/n) = 0$이고, 앞으로 쓸 것은 이 형태이다.

거리 s

그림과 같이 θ를 O에서 D에 내린 수선으로부터 잰다. 그 수선의 발은 O에서 거리 d만큼 떨어져 있고, P는 같은 방향으로 O에서 거리 $r\cos\theta$만큼 떨어져 있으므로, P가 D에 대하여

O와 같은 쪽에 있을 때

$$s = d - r\cos\theta.$$

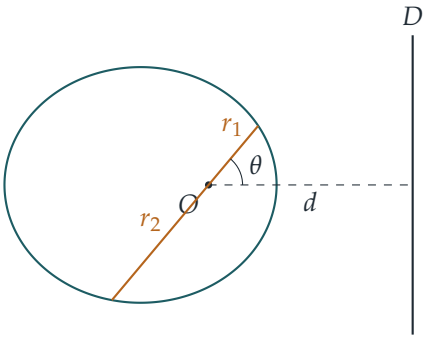
(이 식은 모든 θ에 대하여 성립한다. $\cos\theta < 0$일 때 P는 O보다 D에서 더 멀리 있고, 식도 올바르게 $s > d$를 준다.)

E의 극방정식

E의 모든 점은 D에 대하여 O와 같은 쪽에 있다. 실제로 P가 반대쪽에 있다면 $s = r\cos\theta - d$가 되고, $r = ks$로부터 $r(1 - k\cos\theta) = -kd < 0$을 얻는데, $0 < k < 1$이면 $1 - k\cos\theta > 0$이므로 이는 불가능하다. 따라서 $s = d - r\cos\theta$를 쓸 수 있고, $r = ks$는 다음과 같이 된다.

$$r = k(d - r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{kd}{1 + k\cos\theta}.$$

$k < 1$이므로 분모는 모든 θ에 대하여 양수이고, 따라서 O에서 나가는 각 반직선은 E와 정확히 한 번 만난다.



O를 지나는 현의 길이

O를 지나고 수선과 각 θ를 이루는 직선은 θ 방향과 $\theta + \pi$ 방향의 점에서 E와 만나며, 이 두 점은 O에 대하여 서로 반대쪽에 있다. $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$이므로 현의 길이는

$$l = \frac{kd}{1 + k\cos\theta} + \frac{kd}{1 - k\cos\theta} = \frac{2kd}{1 - k^2\cos^2\theta}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{l} = \frac{1 - k^2\cos^2\theta}{2kd}.$$

이 값은 직선에만 의존하고, 직선의 두 방향 중 어느 쪽을 θ로 부르는지와는 무관하다는 점에 주목한다.

? **생각해 보기** n개의 직선에 대하여 $\cos^2\theta$를 어떻게 더할까?

배각 공식(double-angle formula) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$를 쓴다. $\cos 2\theta$ 항들은 정확히 처음의 합의 실수부이다.

n개의 직선에 대한 합

이웃한 직선끼리 이루는 각이 π/n이므로, 어떤 고정된 α에 대하여 n개의 직선은 각 $\theta_j = \alpha + j\pi/n$ $(j = 1, \ldots, n)$을 이룬다. $2\theta_j$의 이 n개의 값은 $2\alpha + 2j\pi/n$이고, $j = n$을 $j = 0$으로 바꾸면($2\theta_j$가 2π만큼 바뀐다) 처음의 합에 나오는 각들이 된다. 따라서

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2\theta_j = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 2\theta_j = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2},$$

이고, 그러므로

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j} = \frac{1}{2kd}\left(n - k^2 \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{(2-k^2)n}{4kd},$$

이것이 구하는 결과이다. 조건 $n \geq 2$는 처음의 합에서 $w \neq 1$을 보장하기 위해 정확히 한 번 쓰였다.

검산

- $n = 2, k = \frac{1}{2}, d = 1$로 두고, 직선을 OD 방향과 그에 수직인 방향으로 잡는다. OD 방향의 현은 장축(major axis)이며 길이는 $\frac{1/2}{3/2} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{4}{3}$이다. 그에 수직인 현(통경(latus rectum))의 길이는 $2kd = 1$이다. 따라서 $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$이고, 공식도 $\frac{(7/4)\cdot 2}{2} = \frac{7}{4}$를 준다.
- $n = 1$이면 결과는 당연히 성립하지 않는다. 직선 하나의 $1/l$은 그 방향에 의존하기 때문이다. $n = 1$인 경우가 바로 $w = 1$인 경우이다.
- 임의의 d, k, n, α에 대하여 $r = ks$로부터 각 현을 직접 구하는 컴퓨터 검산 결과도 공식과 일치했다. 예를 들어 $d = 1, k = \frac{1}{2}, n = 3$이면 어떤 α에 대해서도 $2.625 = \frac{21}{8}$을 얻는다.

흔한 실수

- $s = d + r\cos\theta$로 쓰는 것. 그림에서 θ는 D 쪽으로 재므로, OP를 따라 바깥으로 나아가면 D에 더 가까워진다.
- 반대 방향의 각이 $\theta + \pi$임을 잊고 현의 나머지 절반을 다시 $kd/(1 + k\cos\theta)$로 잡는 것.
- $2\theta_j$ 대신 각 $\alpha + j\pi/n$을 그대로 더하는 것. 원을 고르게 한 바퀴 도는 것은 두 배 한 각들이며, 처음의 합에 인수 2가 있는 것도 그 때문이다.

STEP 너머

초점–준선 정의에 따르면 모든 이차곡선(conic)은 극방정식 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$를 가지며, $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$이 각각 타원, 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)에 해당한다. 행

성의 운동에 대한 뉴턴(Newton)의 방정식을 풀면 케플러(Kepler)의 궤도가 바로 이 형태로 나타난다. 서로 수직인 임의의 두 초점현(focal chord)에 대하여 $1/l_1 + 1/l_2$가 일정하다는 사실은 고전적인 성질이며, 여기서의 결과는 이를 일반화한 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 궤도 방정식을 이 방법으로 유도한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.