풀이

STEP III 2013, 문제 7

순수수학 • 상미분방정식의 에너지 방법

> **STEP III 2013, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.2 절 **풀지 않고 범위 구하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/bounding-without-solving.html

핵심 아이디어

각 방정식은 용수철에 매달린 입자의 운동처럼 보인다. 미지함수에만 의존하는 "힘" 항이 있고, (ii)와 (iii)에서는 여기에 도함수(derivative)에 비례하는 마찰 항이 더해진다. 방정식에 도함수를 곱하면 방정식은 어떤 "에너지(energy)"의 도함수가 된다. 마찰이 없으면 에너지는 보존되고, 마찰이 결코 반대 방향으로 밀지 않는다면 에너지는 감소할 수밖에 없으므로 처음 값을 넘지 않는다. 소문항 (iii)에서는 에너지를 직접 구성하고, 마찰 계수가 결코 음수가 아님을 보여야 한다.

풀이

소문항 (i)

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$라 하자. 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2y'y'' + 2y^3y' \\ &= 2y'\left(y'' + y^3\right) = 0,\end{aligned}$$

이다. 여기서 미분방정식(differential equation)을 이용하였다. 따라서 E는 상수이고, 그 값은 $\mathrm{E}(0) = 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^4 = \frac{1}{2}$이다. 그러므로 모든 x에 대하여

$$\tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2} - (y')^2 \leq \tfrac{1}{2},$$

이다. $(y')^2 \geq 0$이기 때문이다. 따라서 $y^4 \leq 1$이고, 이로부터 모든 x에 대하여 $|y(x)| \leq 1$이다.

소문항 (ii)

같은 방법으로 미분한 다음, 방정식을 $v'' + \sinh v = -xv'$의 꼴로 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2v'v'' + 2\sinh v\, v' \\ &= 2v'\left(v'' + \sinh v\right) \\ &= -2x\,(v')^2.\end{aligned}$$

이다. $x \geq 0$이면 x와 $(v')^2$이 모두 음이 아니므로 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} \leq 0$이고, 이것이 보이려던 것이다.

따라서 E는 $x \geq 0$에서 증가하지 않으며, 그 범위에서 $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$이다. $x = 0$에서 $\cosh(\ln 3) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$이므로 $\mathrm{E}(0) = 0 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$이다. 그러므로 $x \geq 0$에 대하여

$$2\cosh v(x) = \mathrm{E}(x) - (v')^2 \leq \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3},$$

이고, 따라서 $\cosh v(x) \leq \frac{5}{3}$이다.

소문항 (iii)

(ii)에서처럼 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ 꼴의 에너지를 찾아보자. 그러면

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'w'' + F'(w)\,w' = w'\left(2w'' + F'(w)\right),$$

이고, 방정식을 이용하여 괄호 안이 w'의 상수배가 되게 하고 싶다. 이는 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$일 때 일어난다.

> **?** **생각해 보기** 도함수가 $w\cosh w + 2\sinh w$인 w의 함수는 무엇인가?

부분적분(integration by parts)에 의해 $\int w\cosh w\,\mathrm{d}w = w\sinh w - \cosh w$이고, $\int 2\sinh w\,\mathrm{d}w = 2\cosh w$이다. 두 식을 더하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(w\sinh w + \cosh w\right) = \sinh w + w\cosh w + \sinh w = w\cosh w + 2\sinh w.$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\left(w\sinh w + \cosh w\right).$$

로 잡는다. $g(x) = 5\cosh x - 4\sinh x - 3$이라 하면, 방정식은 $w'' + (w\cosh w + 2\sinh w) = -g(x)\,w'$를 뜻하므로

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'\left(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\right) = -2g(x)\,(w')^2.$$

이다.

? 생각해 보기 $g(x)$가 음수가 되는 경우가 있는가?

지수함수로 나타내면

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{5}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-3 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-3+\tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+9\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)^{2} \;\geq\; 0 \end{aligned}$$

이고, 이는 모든 x에 대하여 성립한다($x=\ln 3$에서만 0이 된다). 따라서 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}\leq 0$이고, $x\geq 0$에 대하여 $\mathrm{E}(x)\leq \mathrm{E}(0)$이다. $x=0$에서 $w=0$이고 $w'=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\mathrm{E}(0)=\frac{1}{2}+2(0+1)=\frac{5}{2}$이다. 그러므로 $x\geq 0$에 대하여

$$2\left(w\sinh w+\cosh w\right)\leq \mathrm{E}(x)\leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{이므로} \qquad w\sinh w+\cosh w\leq \tfrac{5}{4}.$$

이다. 마지막으로, w와 $\sinh w$는 항상 부호가 같으므로 모든 실수 w에 대하여 $w\sinh w\geq 0$이다. 이 항을 버리면 $x\geq 0$에 대하여 $\cosh w(x)\leq \frac{5}{4}$를 얻고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- (ii)에서 이 상계는 처음 순간에 등호가 성립한다: $\cosh v(0)=\cosh(\ln 3)=\frac{5}{3}$.
- (iii)에서 $g(0)=5-0-3=2$이고, 이는 인수분해한 꼴에서 얻은 $\frac{1}{2}(1-3)^2=2$와 일치한다.
- 각 방정식의 수치해를 구해 보면 이 그림이 확인된다: (i)에서는 E가 0.5로 유지되고, (ii)에서는 E가 $\frac{10}{3}$에서 감소하며, (iii)에서는 E가 2.5에서 감소하고 $\cosh w$는 약 1.03 이상으로 올라가지 않아 상계 1.25보다 충분히 작다.

흔한 실수

- $F(w)$를 x에 대하여 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 인수 w'을 빠뜨린다.
- (iii)에서 $w\sinh w\geq 0$이기 때문에 그 항을 버릴 수 있다는 설명 없이 $w\sinh w+\cosh w\leq\frac{5}{4}$에서 멈춘다.
- $g(x)>0$이라고 주장한다: g는 $x=\ln 3$에서 0이 되므로 $\leq$만 성립한다(그리고 필요한 것은 이것뿐이다).

STEP 너머

이러한 에너지 함수는 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)이다. 해를 따라가면서 결코 증가하지 않는 양으로, 계를 직접 풀지 않고도 그 계가 유계로 머물거나 안정된 상태로 수렴함을 증명하는 데 쓰인다. 에너지 보존에 감쇠(damping)에 의한 소산(dissipation)을 더한 이 아이디어는 비선형 진동자의 안정성 이론의 기초이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 비선형 계와 안정성을 다루는 장에서 랴푸노프의 방법을 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.