풀이

STEP III 2013, 문제 6

순수수학 • 복소수 절댓값 부등식

> **STEP III 2013, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.8 절 **원판에 숨은 거리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/poincare-disc.html

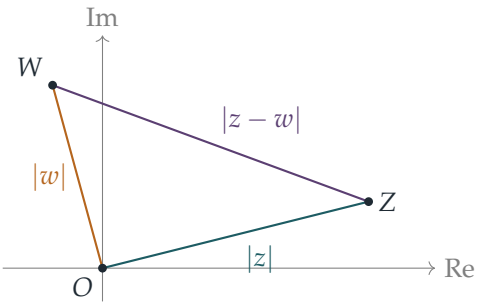
핵심 아이디어

모든 것은 절댓값(modulus)의 제곱을 어떤 수와 그 켤레복소수(conjugate)의 곱, 즉 $|u|^2 = uu^*$로 쓰는 데서 출발한다. 이 방법으로 $|z-w|^2$과 $|1-zw^*|^2$을 전개하면 두 식 모두에서 같은 교차항 $zw^* + z^*w$가 나오며, 바로 이 때문에 하나의 양 E가 두 식에 모두 나타난다. 두 절댓값을 모두 "어떤 것의 제곱에서 E를 뺀 것"의 꼴로 쓰고 나면, 마지막 부등식은 $\frac{A-E}{B-E}$와 $\frac{A}{B}$ 꼴의 두 분수를 비교하는 문제가 되고, 이는 결국 $B-A$의 부호 문제로 귀결된다.

풀이

삼각부등식

아르강 도표(Argand diagram)에 원점 O와, z와 w를 나타내는 점 Z와 W를 표시하자. 거리 OZ와 OW는 각각 $|z|$와 $|w|$이고, 거리 WZ는 $|z-w|$이다.



선분 WZ는 W에서 Z로 가는 가장 짧은 경로이므로, 경로 $W \to O \to Z$보다 길지 않다.

$$|z-w| = WZ \leq WO + OZ = |w| + |z|.$$

등호는 O가 선분 WZ 위에 있을 때, 즉 z와 w가 서로 반대 방향을 가리킬 때(또는 둘 중 하나가 0일 때) 그리고 그때에만 성립한다. O, Z, W가 한 직선 위에 있지만 O가 그 사이에 있지 않으면 "삼각형"은 납작해지지만, 최단 경로 논증은 여전히 적용된다.

소문항 (i)

$|u|^2 = uu^*$와 $(z-w)^* = z^* - w^*$를 이용하면

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(z^*-w^*) \\ &= zz^* + ww^* - zw^* - z^*w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (zw^* + z^*w). \end{aligned}$$

$|zw| = |z||w|$이므로 $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$이고, 따라서

$$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| - zw^* - z^*w - 2|zw| = |z-w|^2$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이를 정리하면

$$E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2.$$

우변은 실수의 제곱의 차이므로 E는 실수이다. 삼각부등식(triangle inequality)에 의해 $0 \leq |z-w| \leq |z|+|w|$이고, 음이 아닌 양을 제곱해도 부등식은 유지되므로 $E \geq 0$이다.

(직접 보일 수도 있다: z^*w는 zw^*의 켤레복소수이므로 $E = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw^*|$이고, $\mathrm{Re}\,u \geq -|u|$이므로 이는 실수이며 0 이상이다.)

소문항 (ii)

같은 방법으로 $(zw^*)^* = z^*w$를 이용하면

$$\begin{aligned}|1-zw^*|^2 &= (1-zw^*)(1-z^*w)\\ &= 1-zw^*-z^*w+zz^*ww^*\\ &= 1+|zw|^2-(zw^*+z^*w)\\ &= \left(1+2|zw|+|zw|^2\right)-(zw^*+z^*w+2|zw|)\\ &= (1+|zw|)^2-E,\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

마지막 부등식

다음과 같이 놓자.

$$A=(|z|+|w|)^2, \qquad B=(1+|zw|)^2,$$

그러면 소문항 (i)과 (ii)의 결과는 $|z-w|^2 = A-E$와 $|1-zw^*|^2 = B-E$가 된다.

먼저 좌변이 정의된다는 것을 확인하자. $|z|>1$이고 $|w|>1$이면 $|zw^*| = |z||w| > 1$이므로 $zw^* \neq 1$이고 $B-E = |1-zw^*|^2 > 0$이다. 또한 $B>0$이다.

증명할 부등식의 양변은 모두 음이 아니므로, 이 부등식은 양변을 제곱한 부등식

$$\frac{A-E}{B-E} \le \frac{A}{B}.$$

와 동치이다. 양변에 양수 $B(B-E)$를 곱하면 이는 다음과 동치이다.

$$(A-E)B \le A(B-E) \iff -EB \le -EA \iff E(B-A) \ge 0.$$

> **생각해 보기** $B-A$의 부호는 무엇이며, $|z|$와 $|w|$에 대한 조건은 어디에서 쓰이는가?

$a=|z|, b=|w|$로 놓으면

$$B-A = (1+ab)^2-(a+b)^2 = 1+a^2b^2-a^2-b^2 = (1-a^2)(1-b^2).$$

$a>1$이고 $b>1$이면 두 괄호가 모두 음수이므로 $B-A>0$이다. 소문항 (i)에 의해 $E \ge 0$이므로 $E(B-A)\ge 0$이다. 위의 모든 단계가 동치였으므로

$$\frac{|z-w|}{|1-zw^*|} \le \frac{|z|+|w|}{1+|zw|}.$$

등호는 $E=0$일 때, 즉 z와 w가 서로 반대 방향을 가리킬 때 그리고 그때에만 성립한다.

$|z| < 1$이고 $|w| < 1$일 때

그렇다. 이 부등식은 여전히 성립한다. 이제 $|zw^*| = ab < 1$이므로 이번에도 $zw^* \neq 1$이고 $B - E > 0$이며, 동치 관계의 사슬은 그대로 성립한다. 이번에는 $(1-a^2)(1-b^2)$의 두 괄호가 모두 양수이므로 역시 $B - A > 0$이고, 따라서 $E(B-A) \geq 0$이 되어 부등식이 성립한다.

중요한 것은 오직 $1-a^2$과 $1-b^2$의 부호가 같다는 점이다. 한 절댓값은 1보다 크고 다른 하나는 작으면 $B - A < 0$이 되어 부등식이 성립하지 않을 수 있다. 예를 들어 $z = 2$, $w = 0.4$이면 좌변은 $1.6/0.2 = 8$이지만 우변은 $2.4/1.8 = \frac{4}{3}$이다.

검산

- $z = 2$, $w = 2\mathrm{i}$로 놓자. 그러면 $|z - w| = 2\sqrt{2}$이고 $1 - zw^* = 1 - 2(-2\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$이므로, 좌변은 $2\sqrt{2}/\sqrt{17} \approx 0.686$이고 우변은 $4/5 = 0.8$이다. 두 값을 모두 $\frac{1}{4}$배로 줄이면($z = \frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{2}\mathrm{i}$) 같은 두 수 $0.686 \leq 0.8$을 얻으며, 이는 $|z|, |w| < 1$인 경우를 보여 준다.
- 등호인 경우: $z = 2 + \mathrm{i}$, $w = -1.5z$로 놓으면 $E = 0$이고, 양변은 소수점 아래 넷째 자리까지 모두 0.6577로 같다.
- 수십만 쌍의 무작위 쌍에 대한 컴퓨터 검사로 두 항등식, $E \geq 0$, 그리고 두 경우의 부등식을 모두 확인하였다.

흔한 실수

- $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2zw^*$로 쓰는 것: 교차항은 $zw^* + z^*w$이며, 이 둘은 서로의 켤레복소수이지만 일반적으로 같지 않다.
- $|1 - zw^*| \neq 0$임을 확인하지 않고 분모를 양변에 곱하는 것. 여기서는 $|zw| \neq 1$이 이를 보장한다.
- 유도 과정에서 $|z|, |w| > 1$을 사용했다는 이유로 마지막 질문에 "아니다"라고 답하는 것: 인수분해 $(1-a^2)(1-b^2)$를 보면 부호가 일치하는지만 중요하다는 것을 알 수 있다.

STEP 너머

$|1 - zw^*| = |1 - z^*w|$이므로 좌변은 $\dfrac{z-w}{1-z^*w}$의 절댓값이다. $|z| < 1$인 z를 고정하면, 사상 $w \mapsto \dfrac{z-w}{1-z^*w}$는 단위원판을 자기 자신으로 보내는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이고, $\left|\frac{z-w}{1-z^*w}\right|$는 z와 w 사이의 의사쌍곡 거리(pseudo-hyperbolic distance)이다. 이

문제의 부등식은 이 거리가 z와 w 각각에서 0까지의 거리의 "쌍곡적 합" 이하라는 것을 말해 준다. 이는 삼각부등식의 강한 형태이며, 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 토대 가운데 하나이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 뫼비우스 변환과 쌍곡 원판을 아름다운 그림으로 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.