풀이

STEP III 2013, 문제 5

순수수학 • 유리성과 서로소

> **STEP III 2013, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q5

핵심 아이디어

모든 단계는 단 하나의 도구로 움직인다. 어떤 수가 곱을 나누고 한 인수와 서로소이면, 그 수는 다른 인수를 나눈다. 유리수를 기약분수로 나타내고 분모를 없앤 다음, 각 인수가 어느 쪽에 들어가야 하는지 살펴본다. 소문항 (ii)에서는 이 방법으로 분모 b를 두 사실 사이에 가두는데, b가 아주 작지 않은 한 두 사실은 동시에 성립할 수 없다.

작은 사실 하나를 반복해서 사용할 것이다. 임의의 양의 정수 s, t에 대하여 **p와 q가 서로소(*coprime*)이면 p^s와 q^t도 서로소이다.** 실제로 p^s와 q^t를 모두 나누는 소수(prime)가 있다면 그 소수는 p와 q를 나누게 되어(곱을 나누는 소수는 인수 중 하나를 나누는데, 이는 주어진 결과에서 a가 소수인 경우이다) 서로소라는 데 모순이다.

풀이

소문항 (i)

$q^n N = p^n$에서 p^n이 $q^n N$을 나눈다는 것을 알 수 있다. p와 q가 서로소이므로 p^n과 q^n도 서로소이고, 주어진 결과($a = p^n, b = q^n, c = N$)에 의하여 p^n이 N을 나눈다. 따라서 어떤 양의 정수 k에 대하여 $N = kp^n$이고, 이것이 보이려던 것이다.

이를 다시 대입하면 $q^n k p^n = p^n$이므로 $q^n k = 1$이다. 둘 다 양의 정수이므로 $k = 1$이고 $q^n = 1$이며, 따라서

$$q = 1 \quad (\text{그리고} N = p^n).$$

이제 임의의 양의 정수 n과 N을 잡고 $\sqrt[n]{N}$이 유리수라고 가정하자. 이 수는 양수이므로 p, q를 양의 정수로 하여 $\sqrt[n]{N} = p/q$를 기약분수로, 즉 p와 q가 서로소가 되도록 쓸 수 있다. 양변을 n제곱하면 $q^n N = p^n$이고, 위의 논의에 의하여 $q = 1$이다. 그러므로 $\sqrt[n]{N} = p$는 양의

정수이다. 따라서 $\sqrt[n]{N}$은 양의 정수이거나 무리수이다.

소문항 (ii)

$\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$일 때 $a^a d^b = b^a c^b$이다.

$d^b = b^a$임을 보이기. 우변을 보면 b^a가 $a^a d^b$를 나눈다. a와 b가 서로소이므로 b^a와 a^a는 서로소이고, 따라서 b^a는 d^b를 나눈다. 대칭적으로 d^b는 $b^a c^b$를 나누고, d^b는 c^b와 서로소이므로 d^b는 b^a를 나눈다. 서로를 나누는 두 양의 정수는 같으므로

$$d^b = b^a,$$

이고, 이를 원래 식에서 약분하면 $a^a = c^b$도 얻는다.

p가 d의 소인수이면 p는 $d^b = b^a$를 나누고, b의 거듭제곱을 나누는 소수는 b를 나눈다. 따라서 p는 b의 소인수이다.

p의 거듭제곱. d와 b를 나누는 p의 가장 높은 거듭제곱을 각각 p^m, p^n이라 하자. 앞 문단에 의하여 $m, n \geq 1$이다. 소인수분해의 유일성(unique factorisation)에 의하여 d^b를 나누는 p의 가장 높은 거듭제곱은 p^{mb}이고, b^a를 나누는 것은 p^{na}이다. $d^b = b^a$이므로 이 둘은 같고, 따라서 $mb = na$이며

$$b = \frac{na}{m}.$$

> **생각해 보기** $b = na/m$에서 어떻게 p^n의 한계를 얻을 수 있을까?

이 식을 $mb = na$로 고쳐 쓰면 b가 na를 나눈다. 그런데 b는 a와 서로소이므로 주어진 결과에 의하여 b는 n을 나누고, 특히 $b \leq n$이다. 또 p^n이 b를 나누므로 $p^n \leq b$이다. 둘을 합치면

$$p^n \leq b \leq n.$$

그런데 $p \geq 2$이고 $n > 0$이므로 주어진 사실 $y^x > x (y = p, x = n)$에 의하여 $p^n > n$이다. 이 모순은 우리의 가정이 불가능했음을 보여 준다. 즉 d는 소인수를 **하나도** 갖지 않는다. 따라서 $d = 1$이므로 $b^a = d^b = 1$이고, 그러므로

$$b = 1.$$

마지막 부분

r를 r^r가 유리수인 양의 유리수라 하자. $r = a/b$를 기약분수로 쓰고(a, b는 양수이고 서로소), $r^r = c/d$도 기약분수로 쓰자($r^r > 0$이므로 c, d는 양수이고, 서로소이다). 그러면

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a} = \left(\frac{c}{d}\right)^{b} \quad \Longrightarrow \quad a^a d^b = b^a c^b,$$

이다. 여기서 양변을 b제곱하고 분모를 없앴다. 이는 정확히 소문항 (ii)의 상황이므로 $b = 1$이고 $r = a$는 양의 정수이다.

검산

- 정수 r는 실제로 조건을 만족한다. $r = 2$이면 $r^r = 4$이다. 또 $b = 1$일 때 결론 $c^b = a^a$는 단지 $c = a^a$를 뜻하므로 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- 반례가 아닌 예: $r = \frac{1}{2}$이면 $r^r = 1/\sqrt{2}$로 무리수이며, 이는 결과와 일치한다. 소문항 (i)에서 $\sqrt[3]{27} = 3$이고 $\sqrt[3]{24}$는 무리수이므로 두 경우가 모두 실제로 일어난다.
- 서로소인 모든 $a, b \leq 24, c < 200, d < 60$에 대하여 컴퓨터로 탐색한 결과, $a^a d^b = b^a c^b$의 해는 $b = d = 1$인 것(즉 $c = a^a$이고 $a = 1, 2, 3$인 경우)뿐이었다.

흔한 실수

- p^n과 q^n이 왜 서로소인지 말하지 않는 것. 주어진 결과는 a와 b가 서로소인 경우에 관한 것이므로 거듭제곱들이 서로소임이 필요하다.
- $b \mid n$이라는 단계 없이 $b = na/m$에서 곧바로 $p^n \leq n$을 결론짓는 것. $mb = na$를 $b \mid n$으로 바꿔 주는 것은 a와 b가 서로소라는 사실이다.
- $(a/b)^{a/b} = c/d$라고 쓰면서 c/d가 기약분수임을 명시하지 않는 것. $\gcd(c, d) = 1$이 없으면 $d^b \mid b^a$라는 단계가 성립하지 않는다.

STEP 너머

주어진 "서로소 약수" 결과는 유클리드(Euclid)의 보조정리(Euclid's lemma)로, 보통 베주(Bézout) 항등식으로부터 증명하며, 소인수분해의 유일성을 떠받치는 원동력이다. 첫 번째 부분은 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실의 일반화이고, 두 번째 부분은 초월수론(transcendence theory)을 처음 맛보는 것이다. 초월수론에서는 겔폰트–슈나이더 정리(Gelfond–Schneider theorem)를 이용하여 예컨대 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 대수적 수(algebraic number)조차 아님을 보인다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이러한 기초를 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.