풀이

STEP III 2013, 문제 4

순수수학 • 1의 거듭제곱근의 곱

> **STEP III 2013, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.3 절 $z^{2n}+1$의 인수분해에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/z2n-plus-one.html

핵심 아이디어

$z^{2n}=-1$의 근은 켤레(conjugate) 쌍 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$로 나타나고, 각 쌍을 곱하면 실수 계수 이차식이 되므로 이로부터 인수분해(factorisation)를 얻는다. 그다음 z의 값 하나를 잘 고르면 인수분해가 코사인에 관한 명제로 바뀐다. $z=\mathrm{i}$에서는 모든 이차식의 z^2+1 부분이 0이 되어 $-2z\cos\theta$ 항만 남는다. 소문항 (ii)에서는 같은 대입을 하면 양변이 모두 0이 되므로, 먼저 $z=\mathrm{i}$에서 0이 되는 인수 하나를 약분한다.

풀이

인수분해

전개하면

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) &= z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= z^2 - 2z\cos\theta + 1,\end{aligned}$$

이다. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$이기 때문이다.

이제 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$가 $z^{2n}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$를 만족할 필요충분조건은 $2n\theta$가 π의 홀수 배인 것, 즉 어떤 정수 k에 대하여 $\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$인 것이다. $(-\pi,\pi]$에 속하는 값은

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2n},\ \pm\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \pm\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

이다. $\frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$이고 $\frac{(2n+1)\pi}{2n} > \pi$이기 때문이다. 이들은 서로 다른 $2n$개의 근이므로 -1의 $(2n)$제곱근 전부이다.

$$e^{\pm i\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$z^{2n}+1$은 최고차항의 계수가 1인(monic) $2n$차 다항식(polynomial)이고 서로 다른 이 $2n$개의 근을 가지므로, 각 켤레 쌍에 첫 번째 결과를 적용하면

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(z-e^{i\theta_k})(z-e^{-i\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n}(z^2-2z\cos\theta_k+1),$$

이다. 이것이 구하는 항등식이다.

소문항 (i)

$z = i$를 대입한다. 각 인수는

$$i^2 - 2i\cos\theta_k + 1 = -2i\cos\theta_k,$$

가 되고, n이 짝수이므로 좌변은 $i^{2n}+1 = (-1)^n+1 = 2$이다. 따라서

$$2 = (-2i)^n \prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k.$$

n이 짝수이면 $(-2)^n = 2^n$이고 $i^n = (i^2)^{n/2} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$이므로 $(-2i)^n = 2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}$이다. 그러므로 $1/(-1)^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$을 이용하면

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}2^{1-n},$$

이다. 좌변의 곱은 정확히 $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 인수분해에 다시 $z = i$를 대입하면 왜 안 될까?

n이 홀수이면 $i^{2n}+1 = (-1)^n+1 = 0$이므로 좌변이 0이 된다. 우변에서는 $m = \frac{1}{2}(n+1)$일 때 가운데 값 $k = m$이 $\theta_m = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$를 주므로, 그 인수는 z^2+1이고 이것 역시 $z = i$에서 0이다. $0 = 0$을 얻을 뿐 아무것도 알 수 없다. 해결책은 먼저 양변에서 인수 z^2+1을 제거하는 것이다.

주어진 사실과 인수분해를 이용하면

$$(1+z^2)(1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}) = (z^2+1)\prod_{k\neq m}(z^2-2z\cos\theta_k+1).$$

이들은 다항식이고 z^2+1은 영다항식이 아니므로 약분할 수 있다(다항식의 나눗셈은 유일하다).

$$1 - z^2 + z^4 - \cdots + z^{2n-2} = \prod_{k\neq m} \left(z^2 - 2z\cos\theta_k + 1\right),$$

이것은 다항식의 항등식이므로 $z = \mathrm{i}$를 포함한 모든 z에 대하여 성립한다.

이제 $z = \mathrm{i}$를 대입한다. 좌변에서 항 $(-1)^j z^{2j}$는 $(-1)^j(-1)^j = 1$이 되고, 항이 n개($j = 0, 1, \ldots, n-1$) 있으므로 좌변은 n이다. 우변에는 $n-1$개의 인수가 있고 각각 $-2\mathrm{i}\cos\theta_k$와 같다.

$$n = (-2\mathrm{i})^{n-1} \prod_{k\neq m} \cos\theta_k.$$

$n-1$이 짝수이므로 소문항 (i)에서와 똑같이 $(-2\mathrm{i})^{n-1} = 2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$이다.

곱을 제곱의 꼴로 바꾸기 위해 k와 $n+1-k$를 짝짓는다.

$$\theta_{n+1-k} = \frac{(2n+1-2k)\pi}{2n} = \pi - \theta_k,$$

이므로 $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$이다. $k \neq m$인 값들은 $1 \le k \le \frac{1}{2}(n-1)$인 $\frac{1}{2}(n-1)$개의 쌍 $\{k, n+1-k\}$로 나뉘므로

$$\prod_{k\neq m} \cos\theta_k = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(-\cos^2\theta_k\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, P, \qquad P = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \cos^2\theta_k.$$

이를 종합하면 두 부호 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$의 곱은 $+1$이 된다.

$$n = 2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} P = 2^{n-1} P,$$

따라서 $P = n\,2^{1-n}$이다. P의 마지막 인수는 $k = \frac{1}{2}(n-1)$, 즉 $\theta_k = \frac{(n-2)\pi}{2n}$에 해당하므로 P는 정확히

$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n} = n\,2^{1-n},$$

이고, 이로써 증명이 끝난다. ($n = 1$이면 곱은 빈 곱으로 $1 = 1\cdot 2^0$과 같으므로 모순이 없다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $n = 2$: $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2} = (-1)^1 2^{-1}$. $n = 4$이면 곱은 $\frac{1}{8}$로 $(-1)^2 2^{-3}$과 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 3$: $\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = 3\cdot 2^{-2}$. $n = 5$이면 $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10} = 0.3125 = \frac{5}{16}$.
- 두 항등식 모두 39 이하의 모든 n에 대하여 컴퓨터로도 확인하였고, 인수분해는 임의의 복소수 z에서 검증하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 인수분해에 $z = \mathrm{i}$를 바로 대입하여 $0 = 0$만 얻는 것.
- 부호를 놓치는 것: 소문항 (i)에서 $n \equiv 2 \pmod 4$이면 답은 실제로 음수이다. $\frac{\pi}{2}$보다 큰 $\frac{1}{2}n$개의 각에 대하여 $\cos\theta_k < 0$이기 때문이다.
- $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$임을 잊어 제곱을 만들 때 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

같은 요령, 즉 $z^N \pm 1$을 단위근(roots of unity)으로 인수분해한 다음 영리하게 고른 점에서 값을 구하는 방법으로 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$과 같은 곱 공식 전체를 얻을 수 있다($\frac{z^n-1}{z-1}$에 $z = 1$을 대입해 보라). 이러한 유한 곱에서 $n \to \infty$로 보내면 오일러(Euler)의 무한 곱(infinite product) $\sin\pi x = \pi x \prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$에 이르는데, 이것은 복소해석학(complex analysis)이 함수를 그 영점들로부터 어떻게 만들어 내는지 처음으로 맛보게 해 준다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 단위근과 이러한 아이디어를 기하적으로 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.