풀이

STEP III 2013, 문제 3

순수수학 • 벡터와 구

> **STEP III 2013, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q3

핵심 아이디어

모든 것은 두 가지 사실에서 나온다. 각 $\mathbf{p}_i$는 단위벡터(unit vector)이고, 네 벡터를 더하면 $\mathbf{0}$이 된다. 길이의 제곱을 내적(dot product)으로 전개하면 $(XP_i)^2$은 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$에 대한 **일차식**이 되고, $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$이므로 일차항들의 합은 사라진다. 네제곱의 경우에는 이차항이 남으므로 실제 좌표가 필요하며, 소문항 (ii)가 바로 그것을 제공한다.

풀이

내적 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$

사면체가 정사면체(regular tetrahedron)이므로 여섯 모서리의 길이는 모두 같다. $i \neq j$일 때

$$(P_iP_j)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_j|^2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j,$$

이다. 여기서 $|\mathbf{p}_i| = 1$(각 꼭짓점은 단위구(unit sphere) 위에 있다)을 이용하였다. 따라서 모서리의 길이가 모두 같으므로 모든 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$ $(i \neq j)$는 같은 값을 가져야 한다. 이 값을 c라 하자.

이제 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$과 $\mathbf{p}_1$의 내적을 구하면

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 1 + 3c = 0,$$

이므로 $c = -\frac{1}{3}$이다. 즉, 요구한 대로 모든 $i \neq j$에 대하여 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = -\frac{1}{3}$이다.

소문항 (i)

$|\mathbf{x}| = 1$이기도 하므로

$$(XP_i)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) = |\mathbf{p}_i|^2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i + |\mathbf{x}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i.$$

i에 대하여 더하고 내적의 분배법칙(distributive law)을 이용하면

$$\sum_{i=1}^{4} (XP_i)^2 = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 8,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$\mathbf{p}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (a, 0, b)$일 때, 조건 $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3}$에서 곧바로 $b = -\frac{1}{3}$을 얻는다. 그러면 $|\mathbf{p}_2| = 1$에서

$$a^2 = 1 - b^2 = \tfrac{8}{9}, \qquad \text{따라서} \qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

이다. $a > 0$이므로 양의 제곱근을 택하였다.

$\mathbf{p}_3 = (u, v, w)$라 하자. 세 조건으로 이 벡터가 결정된다.

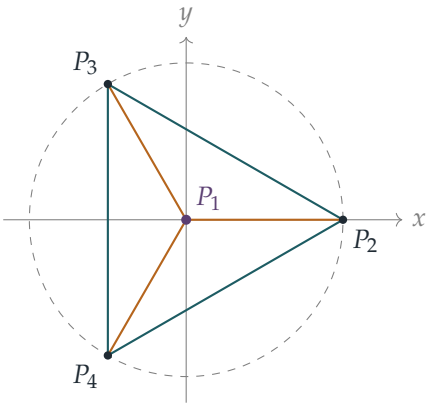
$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies w = -\tfrac{1}{3}, \\
\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies \tfrac{2\sqrt{2}}{3} u + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{1}{3} \implies u = -\tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \\
|\mathbf{p}_3| = 1 &\implies v^2 = 1 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{6}{9} \implies v = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{p}_4$에 대해서도 정확히 같은 방정식이 성립하므로, P_3과 P_4는 이로부터 얻는 두 점이다(두 점은 서로 달라야 하므로 각각 한 부호씩 택한다). 한 가지 방식으로 이름을 붙이면

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

이다(P_3과 P_4의 이름은 서로 바꾸어도 된다). 검산으로, 네 위치벡터(position vector)의 합은 실제로 $\mathbf{0}$이고, $\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$이다.

위에서 내려다보면 P_2, P_3, P_4는 평면 $z = -\frac{1}{3}$ 위에서 정삼각형(equilateral triangle)을 이루고, P_1은 그 중심의 바로 위에 있다.



소문항 (iii)

소문항 (i)에서 $(XP_i)^2 = 2(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)$이므로, 제곱하면

$$(XP_i)^4 = 4(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\sum_{i=1}^{4}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 괄호를 전개하고 다시 한 번 $\sum \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = 0$을 이용하면

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\left(4 - 2\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2\right) = 16 + 4\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2.$$

? **생각해 보기** 일차항은 또다시 사라졌다. 왜 같은 방법으로 $\sum(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2$을 처리할 수는 없을까?

제곱의 합은 $\mathbf{p}_i$에 대한 일차식이 아니므로, $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$을 안다고 해서 이에 대해 직접 알 수 있는 것은 없다. 여기서 좌표가 필요해진다. $\mathbf{x} = (x, y, z)$로 두고 소문항 (ii)의 꼭짓점을 쓰면

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_1 = z, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_2 = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x - z),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x + \sqrt{6}\,y - z), \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}\,y - z).$$

이다. 제곱하여 더한 뒤 항을 정리하면 다음과 같다.

- x^2: $\tfrac{1}{9}(8+2+2) = \tfrac{4}{3}$; y^2: $\tfrac{1}{9}(6+6) = \tfrac{4}{3}$; z^2: $1 + \tfrac{1}{9}(1+1+1) = \tfrac{4}{3}$.
- xy와 yz: 이 항들은 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3$과 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4$에만 나타나는데, 두 식은 y항의 부호만 다르므로 서로 상쇄된다.
- xz: $\tfrac{1}{9}\left(-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = 0$.

그러므로

$$\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \tfrac{4}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \tfrac{4}{3},$$

이다. X가 단위구 위에 있기 때문이다. 따라서

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 16 + 4\cdot\tfrac{4}{3} = \frac{64}{3},$$

이고, 이 값은 요구한 대로 X의 위치에 의존하지 않는다.

> ? **생각해 보기** 우리는 특정한 좌표를 사용하였다. 이 결론은 구에 내접하는 모든 정사면체에 대해 성립할까?

그렇다. 그러한 정사면체는 어느 것이든 O를 중심으로 회전(rotation)시켜 P_1이 $(0,0,1)$로, P_2가 반평면 $y=0, x>0$ 위로 가게 할 수 있다. 회전은 길이를 보존하며, X가 구 전체를 움직일 때 회전된 상도 구 전체를 움직인다. 따라서 소문항 (ii)의 좌표를 써도 일반성을 잃지 않는다.

검산

- $X = P_1$로 잡자. 거리는 0과 세 모서리의 길이이며, 각 모서리의 길이는 $\sqrt{2-2(-\frac{1}{3})} = \sqrt{8/3}$이다. 그러면 $\sum(XP_i)^2 = 3\cdot\frac{8}{3} = 8$이고 $\sum(XP_i)^4 = 3\cdot\frac{64}{9} = \frac{64}{3}$이므로 두 결과와 모두 일치한다.
- P_1의 반대편 점인 $X = (0,0,-1)$로 잡자. 그러면 $XP_1 = 2$이고, 나머지 세 점에 대해서는 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = \frac{1}{3}$이므로 $(XP_i)^2 = \frac{4}{3}$이다. 이로부터 $4 + 3\cdot\frac{4}{3} = 8$과 $16 + 3\cdot\frac{16}{9} = \frac{64}{3} \approx 21.33$을 얻는다.
- 구 위의 무작위 점 수천 개에서 컴퓨터로 확인한 결과, 매번 8과 21.333…이 나왔다.

흔한 실수

- 모든 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$가 같다고 이유 없이 주장하는 것. 그 이유는 $(P_iP_j)^2 = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$를 통해 모서리의 길이가 모두 같다는 데 있다.
- $|\mathbf{x}| = 1$임을 잊는 것. 이 사실은 $(XP_i)^2 = 2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$에도, 마지막 단계의 $x^2+y^2+z^2 = 1$에도 필요하다.
- 소문항 (iii)의 교차항(cross term)에서 계산 실수를 하는 것. 여기서 부호를 잘못 쓰면 X에 대한 거짓 의존성이 남는다.

STEP 너머

소문항 (iii)의 핵심은 **모든** 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 성립하는 항등식 $\sum_i (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \frac{4}{3}|\mathbf{x}|^2$이다. 행렬의 언어로 말하면 $\sum_i \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^{\mathsf{T}} = \frac{4}{3}I$이다. 즉, 네 꼭짓점 벡터는 과잉완비(over-complete) 정규직교기저(orthonormal basis)처럼 행동하며, 이를 **타이트 프레임**(tight frame)이라 한다. 이는 대칭성에 의해 반드시 성립해야 한다. 이 행렬은 정사면체의 모든 회전과 교환 가능하므로 I의 상수배여야 하고, 그 대각합(trace)은 4이기 때문이다. 낮은 차수의 평균이 구 자체의 평균과 일치하는 구 위의 점 집합을 **구면 디자인**(spherical design)이라 하며, 수치적분(numerical integration)과 부호 이론(coding theory)에 쓰인다. 이 배경이 되는 선형대수(외적(outer product), 대칭행렬(symmetric matrix), 고윳값(eigenvalue))에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.