풀이

# STEP III 2013, 문제 2

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 2013, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q2

## 핵심 아이디어

먼저 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$로 써서 제곱근을 없애 두면 1계 도함수(first derivative)를 구하는 일이 수월해진다. 고계 관계식은 이 1계 방정식을 라이프니츠(Leibniz) 규칙(Leibniz's rule)으로 거듭 미분하여 얻는다. $x = 0$에서는 대부분의 항이 사라지고 도함수들 사이의 두 단계 점화식(recurrence)만 남는데, 이 점화식으로 매클로린(Maclaurin) 계수를 하나씩 쌓아 올린다. 마지막 합은 잘 고른 $x$값에서 이 급수를 계산한 것처럼 보인다.

## 풀이

### 1계 방정식

양변에 곱하여 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$를 얻고, 좌변에는 곱의 미분법(product rule)을 써서 양변을 $x$에 대하여 미분한다.

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

양변에 $\sqrt{1-x^2}$($|x| < 1$에서 0이 아니다)를 곱하면

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 1 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

### 고계 관계식

$\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$를 $y^{(k)}$로 쓴다. 1계 방정식을 $n+1$번 미분한다. 상수 1은 사라지고, 두 곱은 라이프니츠 규칙으로 처리한다. $1-x^2$의 도함수는 차례로 $-2x$, $-2$, 그다음부터 0이고, $x$의 도함수

는 1, 그다음부터 0이므로

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[(1-x^2)y'\Big] = (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}(-2)\,y^{(n)}$$
$$= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)x\,y^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[xy\Big] = x\,y^{(n+1)} + (n+1)\,y^{(n)}.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼고 항을 정리하면

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2(n+1)+1)x\,y^{(n+1)} - (n(n+1)+(n+1))y^{(n)} = 0,$$

즉

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)x\,y^{(n+1)} - (n+1)^2 y^{(n)} = 0.$$

여기서는 $n \geq 1$이라는 조건이 전혀 필요하지 않았다. 한 번 미분한 경우($n=0$)에도 같은 꼴 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$을 얻으며, 이 경우도 뒤에서 사용한다.

### 매클로린 급수

$x = 0$을 대입한다. 가운데 항에는 인수 $x$가 있으므로 사라지고

$$y^{(n+2)}(0) = (n+1)^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

이 점화식은 두 칸씩 나아가므로 초깃값이 두 개 필요하다. 정의에서 $y(0) = \arcsin 0 = 0$이고, $x=0$에서 1계 방정식은 $y'(0) - 0 - 1 = 0$이 되므로 $y'(0) = 1$이다.

**? 생각해 보기** 이 두 값만으로 어떻게 모든 도함수를 얻을 수 있을까?

점화식은 $y^{(n)}(0)$을 $y^{(n+2)}(0)$에만 연결하므로, 짝수 계 도함수들은 $y(0)$에서 시작하는 하나의 사슬을 이루고, 홀수 계 도함수들은 $y'(0)$에서 시작하는 또 다른 사슬을 이룬다.

**짝수 거듭제곱.** $y(0) = 0$이므로 점화식에서 $y''(0) = 1^2 \cdot 0 = 0$, 이어서 $y^{(4)}(0) = 0$ 등을 얻는다. 즉 모든 $k$에 대하여 $y^{(2k)}(0) = 0$이다. 따라서 $x$의 모든 짝수 거듭제곱의 계수는 0이다. (이는 $y$가 기함수(odd function) $\arcsin x$를 우함수(even function) $\sqrt{1-x^2}$로 나눈 몫이므로 기함수라는 사실과 들어맞는다.)

**홀수 거듭제곱.** $n = 1, 3, \ldots, 2k-1$에 대하여 점화식을 쓰면

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = (2 \cdot 4 \cdots 2k)^2 = (2^k\,k!)^2,$$

이고, 이 식은 $k = 0$일 때에도 성립한다. $(2k+1)!$로 나누면 매클로린 계수를 얻는다.

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{5!}x^5 + \cdots,$$

따라서 홀수 차 일반항은 $\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$이고, 짝수 차 일반항은 $0 \cdot x^{2k}$이다.

### 무한합

합의 제$n$항은 $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$이며, $n=0$일 때 맨 앞의 1이 된다. 급수와 비교하면 인수 $2^{2n}$을 없애야 하므로, $2^{2n}x^{2n+1}$이 1의 상수배가 되도록 $x$를 고른다. $x=\frac{1}{2}$로 두면 $2^{2n}(\frac{1}{2})^{2n+1}=\frac{1}{2}$이다. 그러므로

$$\frac{\arcsin\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

좌변은 $\dfrac{\pi/6}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$이므로

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{2^2\times 3^2}{7!}+\cdots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

## 검산

- 이미 알려진 급수 $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$에 $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$를 곱하면 $x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\cdots=x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$이고, 실제로 $\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}$이다.
- 합의 처음 다섯 항은 $1+0.16667+0.03333+0.00714+0.00159\approx 1.2087$로, 이미 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx 1.20920$에 가깝다. 항이 매번 약 4배씩 작아지므로 나머지는 작다.

## 흔한 실수

- 라이프니츠 규칙에서 $y^{(n)}$ 항에 붙는 이항계수(binomial coefficient) $\binom{n+1}{2}$를 빠뜨려 $(n+1)^2$이 틀어지는 경우.
- 점화식을 $n\geq 1$일 때에만 사용하여 $y''(0)=0$을 끝내 보이지 못하는 경우. 짝수 사슬에는 $n=0$인 경우(한 번 미분)가 필요하다.
- 마지막 부분에서 $x=1$이나 $x=\frac{1}{4}$를 대입하는 경우. 인수 $2^{2n}$은 $x^{2n}$으로 상쇄되어야 하므로 $x=\frac{1}{2}$일 수밖에 없다.

## STEP 너머

여기서는 "수렴 문제는 무시하였지만", 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 이를 엄밀하게 다룬다. 비판정법(ratio test)에 의하여 이 급수의 수렴반지름(radius of convergence)은 1이고, 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem)를 쓰면 그 구간 안에서 급수가 실제로 함수와 같음을 보일 수 있다. 계수 $\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$은 중심 이항계수(central binomial coefficients)와 밀접한 관련이 있으며, 같은 함수를 한 번 적분하면 $(\arcsin x)^2$의 급수를

얻는다. 멱급수(power series)의 바탕이 되는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.