풀이

STEP III 2013, 문제 11

역학 • 탄성 용수철과 에너지

> **STEP III 2013, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q11

핵심 아이디어

모든 것은 대칭(symmetry)으로 정해진다. 삼각형은 수평을 유지하고, 그 중심은 매달린 점의 바로 아래에 머물며, 위아래로만 움직일 수 있다. 따라서 입자 하나와 용수철 하나만 보면 전체 상황을 알 수 있다. 용수철 하나를 지나는 연직 평면의 기하를 이용하면 용수철의 길이를 θ로 나타낼 수 있다. 연직 방향으로 힘을 분해하면 평형(equilibrium) 조건을 얻고, 에너지 보존(conservation of energy)(탄성 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지)으로 속력을 구한다.

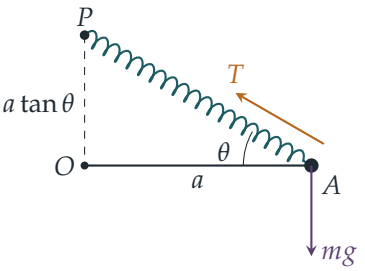
풀이

모형과 기하

질량들은 입자로, 막대는 가볍고 강체인 것으로, 용수철은 가볍고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 본다. 매달린 점을 P, 삼각형의 중심을 O라 하면 O는 P의 바로 아래에 있다. 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 중심에서 꼭짓점까지의 거리는 $s/\sqrt{3}$이므로, 각 꼭짓점은 O로부터 수평 거리

$$OA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$$

만큼 떨어져 있다. 꼭짓점 A 하나를 잡고 P, O, A를 지나는 연직 평면을 보자.



용수철 PA는 수평선 OA와 각 θ를 이루므로, 용수철의 길이는 $a/\cos\theta$이고 A는 P보다 $a\tan\theta$만큼 아래에 있다.

장력

각 용수철의 늘어난 길이(extension)는

$$x = \frac{a}{\cos\theta} - a = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

이다. 따라서 탄성 계수(modulus)가 kmg이고 자연 길이(natural length)가 a이므로 훅의 법칙에 의해

$$T = \frac{kmg}{a}\,x = \frac{kmg(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

$\theta = \frac{1}{6}\pi$에서의 평형

A에 있는 입자에 작용하는 힘은 무게, AP 방향의 용수철 장력(tension), 그리고 두 막대가 주는 힘이다. 막대는 수평면 위에 있으므로 막대가 주는 힘은 수평 방향이다.

> ? **생각해 보기** 막대가 주는 힘을 왜 무시할 수 있을까?

연직 방향으로 힘을 분해하는데, 막대가 주는 힘에는 연직 성분이 없기 때문이다. (수평 방향으로는 장력의 성분 $T\cos\theta$가 막대에 의해 상쇄되며, 그래서 막대가 필요하다. 하지만 그 식은 필요하지 않다.) A에서 연직 방향으로 분해하면

$$T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad k(1-\cos\theta)\tan\theta = 1.$$

$\theta = \frac{1}{6}\pi$에서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$$k\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 4\sqrt{3}+6,$$

이다. 여기서 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$을 썼다. 이것이 구하려던 값이다.

평형 위치에서의 속력

대칭에 의해 삼각형은 중심이 P 아래에 있는 채로 수평을 유지하므로, 세 입자는 모두 같은 속력으로 연직 방향으로 움직인다. 중력과 용수철 외에는 일을 하는 외력이 없으므로 에너지가 보존된다. 늘어난 길이가 x인 용수철의 탄성 에너지는 $kmg\,x^2/(2a)$이다.

처음 상태($\theta = \frac{1}{3}\pi$, **정지**). 이때 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이므로 늘어난 길이는 $x_1 = a$이고, P 아래로의 깊이는 $a\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}a$이다.

평형 상태($\theta = \frac{1}{6}\pi$). 늘어난 길이는

$$x_2 = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \qquad x_2^2 = \frac{a^2(7-4\sqrt{3})}{3},$$

이고, 깊이는 $a\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{a}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 각 입자가 올라가는 높이는

$$\sqrt{3}a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

세 용수철에서 **방출되는 탄성 에너지**는

$$\begin{aligned} 3\cdot\frac{kmg}{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) &= \frac{3kmg}{2a}\cdot\frac{a^2(3-7+4\sqrt{3})}{3} \\ &= 2kmga(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

$k = 4\sqrt{3}+6$이면 $k(\sqrt{3}-1) = 12-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6 = 6+2\sqrt{3}$이므로, 방출되는 탄성 에너지는 $4mga(3+\sqrt{3})$이다.

세 입자가 **얻는 중력 퍼텐셜 에너지**는 $3mg\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,mga$이다.

그 차이가 각각 속력 V로 움직이는 세 입자의 운동 에너지가 된다.

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}mV^2 &= 4mga(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,mga = mga\left(12+2\sqrt{3}\right), \\ V^2 &= \frac{2ag}{3}\left(12+2\sqrt{3}\right) = \frac{4ag}{3}\left(6+\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

검산

- 부호: $\theta = \frac{1}{3}\pi$에서 각 용수철이 연직 방향으로 당기는 힘은 $T\sin\theta = kmg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11.2\,mg > mg$이므로, 에너지 식에서 가정한 대로 삼각형은 실제로 평형 위치를 향해 **위로** 움직이기 시작한다.
- 답은 양수이고 속력의 제곱의 단위(ag)를 가진다.

- $a = 1.3\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 $\theta = \frac{1}{3}\pi$에서 정지한 상태부터 운동 방정식(equation of motion) $\ddot{y} = g - \frac{T}{m}\sin\theta$를 수치적으로 한 걸음씩 풀어 나가면, $\theta = \frac{1}{6}\pi$에서 $V^2 \approx 131.48\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$를 얻으며 이는 $\frac{4ag}{3}(6+\sqrt{3})$과 일치한다.

흔한 실수

- 중심에서 꼭짓점까지의 거리를 a가 아니라 $\sqrt{3}a$나 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$로 잡는 실수.
- 용수철이 세 개, 입자가 세 개라는 사실을 잊는 실수. 인수 3은 탄성 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지 항에 모두 나타난다.
- 운동 방향을 잘못 잡는 실수. 두 위치 사이에서 입자는 **올라가므로**, 중력 퍼텐셜 에너지는 잃는 것이 아니라 얻는 것이다.

STEP 너머

여기서 삼각형의 자유도(degree of freedom)가 하나뿐인 것은 대칭이 다른 모든 운동을 배제하기 때문이다. 좌표 하나(여기서는 θ 또는 깊이 y)를 골라 에너지를 그 좌표로 나타내는 것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 또 평형점 근처에서 퍼텐셜 에너지(potential energy)를 전개하면 작은 연직 진동의 주기(period)도 얻을 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 작은 진동을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.