풀이

STEP III 2013, 문제 10

역학 • 회전 충격

STEP III 2013, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

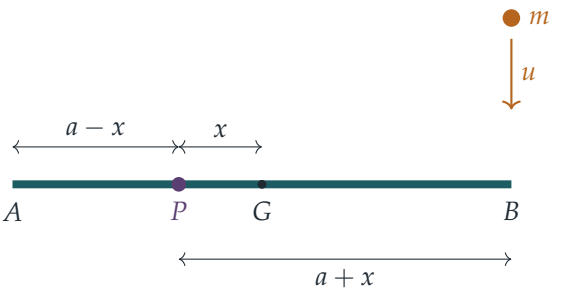
step.maths.org/questions/13-s3-q10

핵심 아이디어

막대의 중심이 P에서 얼마나 떨어져 있는지만 알아차리면 관성 모멘트(moment of inertia)는 평행축 정리(parallel axis theorem)에서 바로 나온다. 충돌 순간 회전축은 막대에 크기를 알 수 없는 충격량(impulse)을 가하므로 선운동량(linear momentum)은 보존되지 않는다. 그러나 이 충격량은 P를 지나 작용하므로 P에 대한 모멘트(moment)가 없다. P에 대한 각운동량 보존(conservation of angular momentum)과 B에서의 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 함께 쓰면 두 미지수에 대한 두 방정식을 얻는다.

풀이

막대는 균일한 강체 막대(uniform rigid rod)로, 입자는 질점으로, 충돌은 순간적인 것으로 모형화한다. 그러면 수평 방향의 충격량은 B에서의 충격량과 회전축에서의 충격량뿐이다(중력처럼 크기가 유한한 힘은 충돌 순간 동안 충격량을 주지 않는다).



관성 모멘트

막대의 중점이자 질량중심(centre of mass)을 G라 하자. $AG = a$이고 $AP = a - x$이므로 거리 PG는 x이다($x > 0$이면 G는 P보다 B 쪽에 있다). 균일한 막대의 중심을 지나고 막대에 수직인 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}Ma^2$이다(길이가 $2a$인 막대의 경우). 평행축 정리에 의해

$$I_P = \tfrac{1}{3}Ma^2 + Mx^2 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2),$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

정의로부터 직접 계산하고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. 선밀도(line density)를 $M/(2a)$라 하고 s를 P에서부터 막대를 따라 잰 위치라 하면, 막대는 $s = -(a - x)$부터 $s = a + x$까지 놓여 있고

$$I_P = \frac{M}{2a}\int_{-(a-x)}^{a+x} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{6a}[(a+x)^3 + (a-x)^3] = \frac{M}{6a}(2a^3 + 6ax^2),$$

이므로 같은 결과를 얻는다.

충돌

P에서 B까지의 거리는 $2a - (a - x) = a + x$이다. 충돌 직후 입자의 속도(처음 운동 방향을 양으로 한다)를 v, 막대의 각속도(angular velocity)를 ω라 하자. 그러면 그 순간 B는 같은 방향으로 속력 $(a + x)\omega$로 움직인다.

? 생각해 보기 여기서 왜 선운동량 보존을 쓸 수 없을까?

회전축이 고정되어 있으므로, 충돌하는 동안 회전축은 막대에 크기를 알 수 없는 충격량을 가한다. 이 충격량은 P에서 작용하므로 P에 대한 모멘트는 0이다. 입자와 막대 사이의 충격량은 막대와 입자로 이루어진 계의 내부 충격량이다. 따라서 P에 대한 계의 전체 각운동량은 보존된다.

$$mu(a + x) = mv(a + x) + I_P\,\omega. \tag{1}$$

B에서 뉴턴의 실험 법칙(분리 속력은 접근 속력의 e배이다)을 적용하면

$$(a + x)\omega - v = eu. \tag{2}$$

(2)에서 $v = (a + x)\omega - eu$이다. 이를 (1)에 대입하면

$$mu(a + x) = m(a + x)[(a + x)\omega - eu] + I_P\,\omega$$
$$mu(1 + e)(a + x) = [m(a + x)^2 + \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2)]\omega.$$

양변에 3을 곱하면

$$\omega = \frac{3mu(1 + e)(a + x)}{M(a^2 + 3x^2) + 3m(a + x)^2},$$

이고, 이것이 주어진 결과이다.

$m = 2M$인 경우

$m = 2M$을 대입하고 M을 약분하면

$$\omega = \frac{6u(1+e)(a+x)}{a^2+3x^2+6(a+x)^2}.$$

여기서 자연스럽게 나타나는 변수는 지렛대 팔(lever arm) $s = a + x$, 즉 거리 PB이며, 이 값은 $[0, 2a]$에 속한다. $x = s - a$로 놓으면 분모는

$$a^2 + 3(s-a)^2 + 6s^2 = 9s^2 - 6as + 4a^2,$$

이므로

$$\omega = \frac{6u(1+e)\,s}{9s^2 - 6as + 4a^2}.$$

$s = 0$(회전축이 B에 있는 경우)이면 $\omega = 0$이므로 최댓값은 $s > 0$에서 나타나고, 이때는 분자와 분모를 s로 나눌 수 있다.

$$\omega = \frac{6u(1+e)}{9s + \dfrac{4a^2}{s} - 6a}.$$

분모를 가능한 한 작게 만들어야 한다. $s > 0$이므로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$9s + \frac{4a^2}{s} \;\geq\; 2\sqrt{9s \cdot \frac{4a^2}{s}} = 12a,$$

이고, 등호는 정확히 $9s = 4a^2/s$, 즉 $s = \frac{2}{3}a$일 때 성립하며 이 값은 실제로 $(0, 2a]$에 속한다. 따라서 분모는 적어도 $12a - 6a = 6a$이고 등호는 $s = \frac{2}{3}a$일 때만 성립하므로

$$\omega \leq \frac{6u(1+e)}{6a} = \frac{u(1+e)}{a}.$$

그러므로 각속도의 최댓값은 $u(1+e)/a$이고, 이는 $a + x = \frac{2}{3}a$일 때, 즉

$$x = -\tfrac{1}{3}a.$$

일 때 얻어진다. 음의 부호는 단지 P가 중심보다 B 쪽에 있다는 뜻이다. P는 A에서 $\frac{4}{3}a$, B에서 $\frac{2}{3}a$만큼 떨어져 있다.

검산

- $x = a$(회전축이 A에 있는 경우)이고 $e = 1$이면 공식은 $\omega = 3mu/\big(a(M+3m)\big)$를 준다. $M \to 0$이라 하면 $\omega = u/a$이므로 B는 $2u$로 움직이는데, 이는 매우 가벼운 "표적"이 탄성 충돌로 맞았을 때의 익숙한 결과이다.
- 최적인 경우에서 $a = 1$, $u = 1$, $e = \frac{1}{2}$로 두면 막대는 $\omega = 1.5$로 회전하므로 B는 1로 움직이고, 충돌 후 입자의 속도는 $v = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이다. 이때 P에 대한 각운동량은 $2M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M\big(1 + \frac{1}{3}\big) \cdot 1.5 = \frac{4}{3}M$이며, 충돌 전의 값 $2M \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$과 일치한다.

- 컴퓨터로 $x \in [-a, a]$에서 촘촘하게 탐색해 보면 최댓값이 $x = -a/3$에서 나타남을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 선운동량을 보존시키는 것: 고정된 회전축이 충격량을 주므로 P에 대한 각운동량만 보존된다.
- 거리 PB를 $a + x$가 아니라 $a - x$나 $2a - x$로 잡는 것.
- $x = -\frac{1}{3}a$가 음수라는 이유로 버리는 것: x는 부호가 있는 위치이며, $[-a, a]$에 속하는 어떤 x든 P를 막대 위에 놓는다.

STEP 너머

미지의 반작용이 사라지도록 모멘트를 잡을 점을 고르는 것은 강체 역학(rigid-body dynamics)에서 가장 유용한 기법 중 하나이다. 이 기법은 "타격 중심(centre of percussion)", 즉 배트나 막대에서 타격을 가해도 회전축에 충격량이 생기지 않는 점에서 다시 등장한다. 대학 1학년 역학에서는 이를 각운동량과 관성 텐서(inertia tensor)의 일반 이론으로 발전시킨다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격에 의한 회전과 타격 중심을 매우 명쾌하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.