풀이

STEP III 2013, 문제 1

순수수학 • 반각 치환

> **STEP III 2013, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q1

핵심 아이디어

반각 치환(half-angle substitution) $t = \tan\frac{1}{2}x$를 쓰면 $\sin x$의 유리함수(rational function)는 모두 t의 유리함수로 바뀐다. 따라서 첫 번째 적분은 $\int \mathrm{d}t/(\text{이차식})$ 꼴이 되고, 완전제곱식(completing the square)을 만들어 마무리한다. 답을 요구된 꼴로 정리하려면 $\tan(A-B)$ 공식이 필요하다. I_n에 대해서는 힌트가 다루기 까다로운 분모가 약분되도록 설계되어 있다: $\sin^{n+1}x + 2\sin^n x = \sin^n x\,(2+\sin x)$. 이로부터 I_0에서 출발해 올라가는 점화식(recurrence)을 얻는데, 첫 번째 부분이 정말로 필요한 적분은 I_0뿐이다.

풀이

치환

$t = \tan\frac{1}{2}x$로 두면 연쇄 법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}(1+\tan^2\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}(1+t^2).$$

사인에 대해서는 배각 공식(double-angle formula)을 쓴 다음 $\cos^2\frac{1}{2}x = 1/\sec^2\frac{1}{2}x$로 쓴다:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 2\tan\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

이로써 두 결과가 모두 증명되었다.

첫 번째 적분

x가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 t는 $\tan 0 = 0$에서 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$까지 변하고, $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$이다. 또한

$$1 + a\sin x = \frac{1 + t^2 + 2at}{1+t^2},$$

이므로 인수 $1+t^2$이 약분되어

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2at+1} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+a)^2+(1-a^2)}.$$

$0 < a < 1$이므로 상수 $1-a^2$은 양수이다. $r = \sqrt{1-a^2}$으로 두자. $\int \mathrm{d}u/(u^2+r^2) = \frac{1}{r}\arctan\frac{u}{r}$를 이용하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{r}\Big[\arctan\frac{t+a}{r}\Big]_0^1 = \frac{2}{r}(\alpha-\beta),$$

이고, 여기서

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{r} = \frac{1+a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}, \qquad \tan\beta = \frac{a}{r},$$

이며 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이다.

> **생각해 보기** 이것은 우리가 원하는 답처럼 보이지 않는다. 두 아크탄젠트의 차를 어떻게 하나의 아크탄젠트로 바꿀 수 있을까?

차의 탄젠트를 구한다.

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{(1+a)-a}{r} = \frac{1}{r}, \qquad 1+\tan\alpha\tan\beta = 1+\frac{a(1+a)}{1-a^2} = 1+\frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

이므로

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1-a}{r} = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}.$$

역함수를 취하기 전에 $\alpha-\beta$가 arctan의 치역인 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인해야 한다. 실제로 그렇다: 두 각은 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 있고, $\tan\alpha > \tan\beta$(그 차가 $1/r > 0$)이므로 $0 < \alpha-\beta < \frac{1}{2}\pi$이다. 따라서 $\alpha-\beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$이고

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

I_3의 계산

힌트를 따르면

$$I_{n+1} + 2I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^n x\,(\sin x + 2)}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

$n = 0, 1, 2$일 때의 우변이 필요하다:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi.$$

? **생각해 보기** 점화식은 각 I_n을 다음 항과 연결해 주지만, 어디에서 출발하는가?

I_0은 따로 구해야 하며, 바로 여기서 첫 번째 부분이 쓰인다. 인수 2를 묶어 내고 $a = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$\begin{aligned} I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{1}{2}\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3/4}} \arctan \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

이제 점화식 $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x - 2I_n$을 따라 올라간다:

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\pi - 2I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_2 &= 1 - 2I_1 = 1 - \pi + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_3 &= \tfrac{1}{4}\pi - 2I_2 = \frac{\pi}{4} - 2 + 2\pi - \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

따라서

$$I_3 = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} - 2.$$

검산

- $a \to 0$일 때 첫 번째 결과는 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$가 되어야 한다. 실제로 $2\arctan 1 = \frac{1}{2}\pi$로 수렴(converge)한다.
- $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $0 \le \sin^3 x/(2 + \sin x) \le \frac{1}{3}$이므로 $0 < I_3 < \frac{1}{6}\pi \approx 0.52$여야 한다. 우리의 답은 $I_3 \approx 0.2318$이고, I_3의 수치 적분(numerical integration) 결과와 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다. 마찬가지로 $I_0 = \pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$은 당연히 그래야 하듯 $\frac{\pi}{6}$과 $\frac{\pi}{4}$ 사이에 있다.
- 구간에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로 값들은 마땅히 $I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > 0$으로 감소한다.

흔한 실수

- 적분 구간(limits)을 $t = 0$과 $t = 1$로 바꾸는 것을 잊거나, $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $2/(1 + t^2)$를 빠뜨리는 것.
- $\alpha - \beta$가 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인하지 않고 $\tan(\alpha - \beta)$로부터 $\alpha - \beta = \arctan(\dots)$라고 결론 내리는 것.
- I_0에 $a = 2$로 첫 번째 결과를 적용하는 것: 이 결과는 $0 < a < 1$일 때만 성립하므로 먼저 인수 2를 묶어 내야 한다.

STEP 너머

$t = \tan\frac{1}{2}x$ 치환(흔히 바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고 부른다)을 쓰면 $\sin x$와 $\cos x$의 모든 유리함수가 초등함수인 원시함수(antiderivative)를 가진다는 것을 알 수 있다. t의 유리함수는 모두 부분분수(partial fractions)로 처리할 수 있기 때문이다. 기하학적으로 이것은 단위원의 입체 사영(stereographic projection) 매개화 $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$이며, 유리수 t로부터 모든 피타고라스 세 수(Pythagorean triple)를 만들어 내기도 한다. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x/(1 + a\sin x)$ 같은 적분은 복소해석학(complex analysis)에서 경로 적분(contour integration)을 처음 적용해 보는 고전적인 예이기도 하다. 그 이유를 보려면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 훌륭한 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.