풀이

STEP II 2013, 문제 9

역학 • 평형 상태의 마찰

> **STEP II 2013, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q9

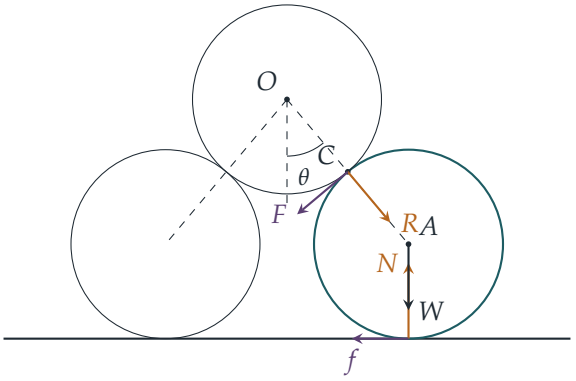
핵심 아이디어

대칭성(symmetry)이 일의 대부분을 해 준다. 세 원판을 하나의 계로 보면 지면의 반작용을 곧바로 얻는다. 그다음 아래 원판의 중심에 대한 모멘트(moment)를 구한다. 지면에서의 마찰력과 위 원판에서 오는 마찰력은 모두 접선 방향으로 작용하므로 팔의 길이(lever arm), 곧 반지름이 같고, 따라서 크기가 같아야 한다. 이것을 알고 나면 아래 원판과 위 원판에 작용하는 힘을 분해하여 두 미지수에 대한 두 방정식을 얻는다.

풀이

원판들을 반지름이 r이고 무게가 각각 W인 똑같은 균일한 강체(rigid body) 원판으로 모형화하고, 모두 하나의 연직 평면 위에 있다고 하자. 위 원판의 중심을 O, 오른쪽 아래 원판의 중심을 A라 하면 $OA = 2r$이고, OA는 아래 방향의 연직선과 각 θ를 이룬다. 두 원판의 접점 C는 OA의 중점이다.

좌우 대칭에 의해 왼쪽 아래 원판에 작용하는 힘은 오른쪽 원판에 작용하는 힘과 거울상이므로, 오른쪽 원판만 다루면 된다. 점 C에서 오른쪽 원판은 OA 방향으로 (O에서 멀어지는 쪽으로 미는) 수직항력(normal reaction) R과 공통접선 방향의 마찰력(friction force) F를 받는다. 지면에서는 수직항력 N과 마찰력 f를 받는다.



그림은 오른쪽 아래 원판에 작용하는 힘을 나타낸다. 뉴턴(Newton)의 제3법칙(third law)에 의해 위 원판은 C에서 R과 F를 반대 방향으로 받으므로, 마찰력은 위 원판을 접선을 따라 위쪽과 바깥쪽으로 민다.

소문항 (i)

세 원판을 함께 하나의 계로 보자. 원판 사이의 힘은 내력이므로 서로 상쇄되고, 외력은 세 무게와 지면에서 오는 힘뿐이다. 두 지면 반작용은 대칭에 의해 같고 지면에서의 마찰력은 수평이므로, 연직 방향으로 분해하면

$$2N = 3W \quad \Longrightarrow \quad N = \tfrac{3}{2}W,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

> ? **생각해 보기** 아래 원판에는 미지수가 R, F, f의 세 개인 것처럼 보인다. 세 번째 방정식은 어디에서 오는가?

모멘트에서 온다. 오른쪽 아래 원판에 대하여 A에 대한 모멘트를 구하자. 무게 W, 수직항력 N, 수직항력 R은 모두 A를 지나므로 모멘트가 없다. 마찰력 f는 가장 낮은 점에서의 접선을 따라, F는 C에서의 접선을 따라 작용하므로 각각의 팔의 길이는 r이다. 두 힘은 원판을 서로 반대 방향으로 돌려야 하므로

$$fr = Fr \quad \Longrightarrow \quad f = F.$$

(이로써 그림 속 방향도 정해진다. 원판은 바깥쪽으로 밀리므로 f는 안쪽을 향하고, 그러면 아래 원판에 작용하는 F는 그 모멘트를 상쇄하기 위해 접선을 따라 아래쪽과 안쪽을 향해야 한다.)

O에서 A로 향하는 단위벡터는 $(\sin\theta, -\cos\theta)$이고, 아래 원판에 작용하는 F의 접선 방향은 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$이다. 아래 원판에 대하여 수평 방향으로 분해하면

$$R\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

이다. 여기서 $f = F$를 이용하였다.

위 원판에서는 두 접점이 각각 $R\cos\theta + F\sin\theta$로 같은 위쪽 성분을 준다. 연직 방향으로 분해하면

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = W.$$

$F = \dfrac{R\sin\theta}{1+\cos\theta}$를 대입하면

$$W = 2R\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2R\cdot\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = 2R.$$

따라서 맞닿은 두 원판 사이의 수직항력은

$$R = \tfrac{1}{2}W,$$

이고 이는 θ에 의존하지 않는다. 그러면

$$F = \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{W\sin\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

이고, 이것이 구하는 마찰력이다.

일관성을 확인하기 위해 아래 원판에 대하여 연직 방향으로 분해하면 $N = W + R\cos\theta + F\sin\theta = W + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W$이고, 이는 소문항 (i)과 일치한다.

소문항 (iii)

반각 공식(half-angle formulae) $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$와 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$를 이용하면

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

평형(equilibrium)이 되려면 모든 접점에서 마찰력이 한계값(limiting value)을 넘지 않아야 한다. 원판 사이에서 이는 $F \le \mu R$, 즉

$$\tan\tfrac{\theta}{2} \le \mu.$$

를 뜻한다. (지면에서는 $f \le \mu N$, 즉 $\frac{1}{2}W\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{3}{2}\mu W$이어야 한다. 이 조건이 더 약하므로, 중요한 것은 원판 사이의 접촉이다.)

생각해 보기 θ를 원하는 만큼 작게 하여 $\tan\frac{\theta}{2}$를 아주 작게 만드는 것을 막는 것은 무엇인가?

아래 원판들은 서로 닿지 않는다. 두 원판의 중심 사이 거리는 $2\cdot 2r\sin\theta = 4r\sin\theta$이고, 이 값이 $2r$보다 커야 하므로 $\sin\theta > \frac{1}{2}$이다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 이는 $\theta > \frac{\pi}{6}$, 따라서 $\frac{\theta}{2} > \frac{\pi}{12}$를 뜻한다. tan는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 증가하므로

$$\tan\tfrac{\theta}{2} > \tan\tfrac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

따라서 평형이 되려면 $\mu \geq \tan\frac{\theta}{2} > 2-\sqrt{3}$이어야 한다. $\mu < 2-\sqrt{3}$이면 허용되는 어떤 θ 값도 이 조건을 만족하지 않으므로 평형은 불가능하다.

검산

- $\theta \to 0$일 때 위 원판은 다른 원판들 바로 위에 놓이고 $F \to 0$이다. 예상대로 마찰력이 필요 없다.
- $\theta = 1$ 라디안과 같은 임의의 표본 각에 대하여 $R = \frac{1}{2}W$, $F = f = \frac{1}{2}W\tan\frac{1}{2}$, $N = \frac{3}{2}W$를 대입하면 각 원판에서 두 힘 성분과 모멘트가 모두 평형을 이룬다.
- $2-\sqrt{3} \approx 0.2679$이고, 이는 $\tan 15^\circ \approx 0.2679$와 일치한다. 30°보다 약간 큰 θ에 대해 수치적으로 훑어보면 $\mu = 0.2679$일 때는 평형이 불가능하고 $\mu = 0.268$일 때는 가능함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 원판 사이의 마찰력을 0으로 가정하거나 아예 잊어버리는 것. 그러면 아래 원판의 모멘트 방정식에서 $f = 0$이 되어, 아래 원판들이 미끄러져 벌어지는 것을 막을 것이 아무것도 없게 된다.
- 아래 원판들이 서로 닿지 않는다는 조건을 놓치는 것. 이 조건이 θ의 하한을 주는 유일한 조건이며, 따라서 $2-\sqrt{3}$이 나오는 곳이다.
- F의 방향을 잘못 잡는 것. 추측하지 말고 A에 대한 모멘트 방정식을 이용하여 방향을 정하라.

STEP 너머

이 문제가 정역학적으로 결정되는(statically determinate) 것은 오로지 대칭성과 모멘트 방정식 덕분이다. 거친 물체들이 쌓여 있는 많은 경우에는 평형 조건만으로 마찰력을 구할 수 없으며, 공학자들은 물체가 어떻게 변형되는지를 모형화해야 한다. 깔끔한 결과 $F/R = \tan\frac{\theta}{2}$는 마찰각(friction angle)이라는 개념의 한 예이다. 평형은 전체 접촉력이 법선으로부터 $\arctan\mu$의 각 이내에 놓일 때, 그리고 오직 그때에만 가능하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 마찰과 강체 정역학을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.