풀이

# STEP II 2013, 문제 8

순수수학 • 미적분과 부등식

> **STEP II 2013, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q8

## 핵심 아이디어

f가 감소함수(decreasing function)이므로 이 영역은 오른쪽으로 갈수록 낮아지기만 하는 "계단" 모양이다. 따라서 가장 좋은 직사각형은 왼쪽 아래 구석, 즉 직선 $y = \mathrm{f}(t)$ 위에 놓이고 $y$축에 붙어 있으며 오른쪽 위 꼭짓점이 곡선 위에 있는 것이다. 이로써 소문항 (i)은 일변수 함수를 최대화하는 문제로 바뀐다. 소문항 (ii)는 두 넓이, 즉 영역 전체의 넓이와 그 안에 놓인 직사각형의 넓이를 비교하고, 소문항 (iii)은 $\mathrm{f}(x) = 1/(1+x)$에 대하여 모든 것을 구체적으로 계산할 뿐이다.

## 풀이

### 소문항 (i)

영역은 $\{(x, y) : 0 \le x \le t,\ \mathrm{f}(t) \le y \le \mathrm{f}(x)\}$이다. f가 감소하므로 $x < t$에서 곡선은 직선 $y = \mathrm{f}(t)$보다 위에 있다.

영역 안에 놓인 임의의 직사각형 $[a, b] \times [c, d]$를 생각하자. 아랫변은 $c \ge \mathrm{f}(t)$, 왼쪽 변은 $a \ge 0$을 만족해야 하고, 오른쪽 위 꼭짓점 $(b, d)$는 영역 안에 있어야 하므로 $b \le t$이고 $d \le \mathrm{f}(b)$이다. 따라서 그 넓이는 많아야

$$b(\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(t)),$$

이고, 이 값은 직사각형 $[0, b] \times [\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(b)]$로 실제로 얻어진다. 이 직사각형은 영역 안에 들어간다. $0 \le x \le b$에서 $\mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(b)$이므로 직사각형이 곡선 아래에 놓이기 때문이다. 그러므로

$$A_0(t) = \max_{0 \le x \le t} R(x), \qquad R(x) = x(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)).$$

이제 $R(0) = R(t) = 0$이고 $0 < x < t$에서 $R(x) > 0$이므로, $t > 0$이면 최댓값은 내부의 점 $x_0 \in (0, t)$에서 얻어지고, 그 점에서 $R'(x_0) = 0$이다.

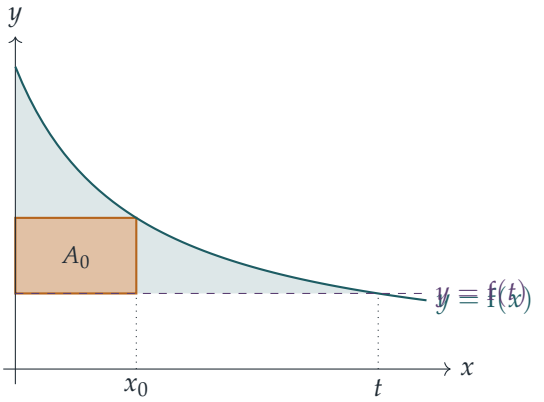
$$R'(x) = \mathrm{f}(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0\mathrm{f}'(x_0) + \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}(t).$$

따라서 요구한 대로, 이 조건을 만족하는 $x_0$에 대하여 $A_0(t) = x_0(\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(t))$이다. ($t = 0$이면 영역의 폭이 없으므로 $A_0(0) = 0$이고, $x_0 = 0$이 조건을 자명하게 만족한다.)

**소문항 (ii)**

$t\,\mathrm{g}(t) = \int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$라 하자. 양변을 미분하되, 왼쪽에는 곱의 미분법(product rule)을, 오른쪽에는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 쓰면

$$\mathrm{g}(t) + t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t).$$




적분 $\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x$는 정확히 색칠한 영역, 즉 $0 \le x \le t$에서 곡선과 직선 $y = \mathrm{f}(t)$ 사이 영역의 넓이이다. 소문항 (i)의 최적 직사각형은 이 영역 안에 놓이지만 영역을 다 채우지는 못한다. $x_0 < x < t$에서 직사각형은 아무것도 차지하지 않지만, f가 순감소하므로 그곳에서 영역의 높이는 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t) > 0$이다. 따라서 그 가느다란 조각의 넓이는 양수이고,

$$\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x > A_0(t).$$

? **생각해 보기** 좌변을 g′이 들어간 식으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

적분을 나누고 g의 정의를 쓴 다음, 방금 증명한 결과를 쓰면

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{g}(t) - t\,\mathrm{f}(t)\\ &= -t\big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\\ &= -t \cdot t\,\mathrm{g}'(t) = -t^2\mathrm{g}'(t).\end{aligned}$$

따라서 $-t^2 g'(t) > A_0(t)$이다.

**소문항 (iii)**

여기서 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$는 $x \geq 0$에서 양수이고 순감소하므로, 위의 모든 내용이 적용된다.

**좌변.** 소문항 (ii) 끝의 계산으로부터

$$-t^2 g'(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x} - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

**직사각형.** $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$이므로

$$xf'(x) + f(x) = \frac{-x + (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

따라서 $x_0$에 대한 조건은 $(1+x_0)^2 = 1+t$이다. $s = \sqrt{1+t}$라 하면 $s > 1$이고 $x_0 = s-1$이다(양의 근이며, $0 < x_0 < t$임에 주목하자). 그러면 $1+t = s^2$이고

$$A_0(t) = (s-1)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{(s-1)^2}{s^2} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)^2.$$

**생각해 보기** 양변이 복잡해 보인다. 자연스러운 변수는 무엇일까?

$s$로 나타내면 모든 것이 깔끔해진다. $\ln(1+t) = 2\ln s$이고 $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{s^2}$이므로, $-t^2 g'(t) > A_0(t)$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 2\ln s - 1 + \frac{1}{s^2} &> 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \\ \iff \quad 2\ln s &> 2 - \frac{2}{s} \\ \iff \quad \ln s &> 1 - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

$s = \sqrt{1+t}$이고 $\ln s = \ln\sqrt{1+t}$이므로 이는

$$\ln\sqrt{1+t} > 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \qquad (t > 0),$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

## 검산

- $t = 3$이면 $s = 2$, $x_0 = 1$, $A_0 = \frac{1}{4}$이고, 영역의 넓이는 $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.636 > 0.25$이다. 최종 부등식은 $\ln 2 \approx 0.693 > 0.5$가 된다.

- 여러 $t$ 값에 대하여 직사각형 $x\big(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(t)\big)$를 컴퓨터로 직접 탐색하여, 최댓값이 $(1-1/\sqrt{1+t})^2$이고 $x=\sqrt{1+t}-1$에서 얻어짐을 확인하였다.
- $t\to 0^+$일 때 최종 부등식의 양변은 모두 0으로 간다. 전개하면 $\ln s\approx(s-1)-\frac{1}{2}(s-1)^2$이고 $1-\frac{1}{s}\approx(s-1)-(s-1)^2$이므로, 마땅히 그래야 하듯 좌변이 약 $\frac{1}{2}(s-1)^2$만큼 더 크다.

## 흔한 실수

- 최적 직사각형의 꼭짓점이 곡선 위에 있다고 설명 없이 가정하는 것. 소문항 (i)에서처럼 감소한다는 성질이 필요하다.
- 넓이 부등식이 왜 순부등식인지 말하지 않는 것. 직사각형은 영역 중 $x_0<x<t$인 부분을 덮지 못한다.
- 음의 근 $1+x_0=-\sqrt{1+t}$를 택하는 것. 이 경우 $x_0<0$이 된다.

## STEP 너머

최종 부등식 $s>1$일 때 $\ln s>1-1/s$는 고전적인 부등식 $1-\frac{1}{s}<\ln s<s-1$의 절반으로, 보통은 $\int_1^s \mathrm{d}u/u$를 직사각형과 비교하여 얻는다. 이 문제는 더 영리한 기하적 경로로 그 결과에 도달한다. 적분을 직사각형의 넓이와 비교하는 것은 리만 적분(Riemann integral)의 핵심이며, 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 이를 상합과 하합(upper and lower sums)으로부터 신중하게 구성한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이를 매우 읽기 쉽게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.