풀이

STEP II 2013, 문제 7

순수수학 • 펠 방정식의 해

> **STEP II 2013, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q7

핵심 아이디어

$x^2 - 2y^2 = 1$ 꼴의 방정식을 펠 방정식(Pell equation)이라 한다. 해를 하나만 찾으면, 고정된 선형 사상(linear map)을 적용하여 해를 무수히 많이 만들어 낼 수 있다. 소문항 (i)과 (ii)는 이 해들을 제곱수이기도 한 삼각수(triangular number)와 연결한다. 소문항 (iii)의 요령은 a^2을 이항한 뒤 $c^4 - a^2$을 두 제곱의 차로 인수분해(factorise)하는 것이다. b가 소수(prime)이므로 b^3을 두 인수의 곱으로 나누는 방법은 매우 적다. 그리고 소문항 (ii)는 마지막 부분에서 쓸 소수가 아닌 b를 제공한다.

풀이

소문항 (i)

$1^2 - 2\cdot 0^2 = 1$이므로 자명한 해는 $x = 1, y = 0$이다.

이제 $p^2 - 2q^2 = 1$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}(3p+4q)^2 - 2(2p+3q)^2 &= (9p^2 + 24pq + 16q^2) - 2(4p^2 + 12pq + 9q^2)\\ &= p^2 - 2q^2 = 1,\end{aligned}$$

이다. pq항이 소거되기 때문이다. 따라서 $x = 3p + 4q, y = 2p + 3q$ 역시 해이며, 이것이 보여야 할 내용이다.

이를 $(p, q) = (1, 0)$에 적용하면 $(3, 2)$를 얻고, $(3, 2)$에 다시 적용하면 $(3\cdot 3 + 4\cdot 2,\ 2\cdot 3 + 3\cdot 2) = (17, 12)$를 얻는다. 검산: $9 - 8 = 1$이고 $289 - 288 = 1$이다. 따라서 x가 양의 홀수이고 y가 양의 짝수인 두 해는

$$(x, y) = (3, 2) \quad \text{그리고} \quad (x, y) = (17, 12).$$

이다. (실제로 $3p+4q \equiv p \pmod 2$이므로 이 사상은 x가 홀수임을 항상 유지하고, $2p+3q \equiv q \pmod 2$이므로 y가 한 번 짝수가 되면 계속 짝수로 유지한다. 따라서 이 사슬에서 이후에 나오는 모든 해도 올바른 홀짝성(parity)을 가진다: $(99,70)$, $(577,408)$ 등.)

소문항 (ii)

x가 홀수이고 y가 짝수라 하고, 정수 m, n에 대하여 $x=2m+1$, $y=2n$으로 쓰자. 그러면 $(*)$는

$$(2m+1)^2-2(2n)^2=1 \iff 4m^2+4m=8n^2 \iff n^2=\tfrac{1}{2}m(m+1),$$

이 된다. 마지막 단계에서는 8로 나누었다. 이것이 요구된 꼴이다. (모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 이러한 x와 y에 대하여 두 방정식은 동치이다.)

따라서 n^2은 삼각수 $1+2+\cdots+m$이다. 소문항 (i)에서 $(3,2)$는 $m=1$, $n=1$을 주고 (즉 $1=1$), $(17,12)$는 $m=8$, $n=6$을 준다 (즉 $36=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9$). 이 중 두 번째를 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (iii)

식을 정리하고 두 제곱의 차로 인수분해하면

$$b^3=c^4-a^2=(c^2-a)(c^2+a).$$

이다. $b^3>0$이고 $c^2+a>0$이므로 인수 c^2-a도 양의 정수이다. 또한 $a>0$이므로 $c^2-a<c^2+a$이다.

? **생각해 보기** b^3을 두 양의 정수의 곱으로 나타내는 방법은 몇 가지인가?

b가 소수이므로 b^3의 양의 약수는 1, b, b^2, b^3뿐이다. 따라서 b^3을 작은 인수와 큰 인수의 곱으로 분해하는 방법은 $1\times b^3$과 $b\times b^2$뿐이다. 다른 방법은 없으며, b^3은 완전제곱수(perfect square)가 아니므로 두 인수가 같을 수도 없다.

경우 1: $c^2-a=1$이고 $c^2+a=b^3$. 두 식을 더하고 빼면

$$c^2=\tfrac{1}{2}(b^3+1), \qquad a=\tfrac{1}{2}(b^3-1).$$

경우 2: $c^2-a=b$이고 $c^2+a=b^2$. 두 식을 더하고 빼면

$$c^2=\tfrac{1}{2}b(b+1), \qquad a=\tfrac{1}{2}b(b-1).$$

(문제는 이 공식들만 묻지만, 실제로 어느 경우가 일어나는지 알아 둘 가치가 있다. 경우 2는 결코 일어나지 않는다. $b=2$이면 $c^2=3$이어야 한다. b가 홀수인 소수이면

$1 \le \frac{1}{2}(b+1) < b$이므로 b와 $\frac{1}{2}(b+1)$은 서로소(coprime)이고, 그 곱이 제곱수 c^2이므로 각각이 제곱수여야 한다. 그런데 소수는 결코 제곱수가 아니다. 경우 1은 실제로 일어난다: $b = 23$이면 $\frac{1}{2}(23^3+1) = 6084 = 78^2$이므로 $a = 6083$, $b = 23$, $c = 78$은 해이다.)

마지막 부분

경우 2는 소수에 대해서는 성립하지 않지만, b가 소수라는 조건을 없애면 그 공식들은 여전히 해를 준다. $\frac{1}{2}b(b+1)$이 완전제곱수 c^2일 때마다 $a = \frac{1}{2}b(b-1)$로 두자. 그러면 $2c^2 = b(b+1)$을 이용하여

$$a^2 + b^3 = (c^2 - b)^2 + b^3 = c^4 - 2bc^2 + b^2 + b^3 = c^4 - b^2(b+1) + b^2 + b^3 = c^4,$$

을 얻는다. 소문항 (ii)는 $\frac{1}{2}b(b+1)$이 정확히 언제 제곱수인지 알려 준다: $n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$인 $b = m$일 때이다. 해 $m = 1$은 $a = 0$을 주므로 허용되지 않지만, $m = 8$, $n = 6$은 성립한다. $b = 8$, $c = 6$, $a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$로 두면

$$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296 = 6^4.$$

이다. 따라서 $a = 28$, $b = 8$, $c = 6$은 $b = 2^3$이 소수가 아닌 해이다.

검산

- 사슬의 다음 해 $(99, 70)$은 $9801 - 2 \cdot 4900 = 1$을 만족하고, $m = 49$, $n = 35$를 주며 $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50 = 1225 = 35^2$이다.
- $6^4 = 1296$이고 $28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296$이다.
- 모든 $c < 400$에 대하여 컴퓨터로 탐색한 결과, b가 소수인 해는 $a = 6083$, $b = 23$, $c = 78$뿐이었다. 이것은 경우 1의 해이다: $78^4 - 6083^2 = (78^2 - 6083)(78^2 + 6083) = 1 \times 12167 = 23^3$.

흔한 실수

- $c^2 - a$가 **작은** 인수여야 한다는 것을 잊어서, a가 음수인 불필요한 "경우"가 생긴다.
- 인수분해 $1 \times b^3$을 놓치고 $b \times b^2$인 경우만 찾거나, 그 반대로 한다.
- 마지막 부분에서 $(3, 2)$로부터 얻은 $m = 1$을 사용하여 $a = 0$을 얻는다. 문제는 a가 양수일 것을 요구한다.

STEP 너머

방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$은 펠 방정식이다. 그 해는 정확히 거듭제곱 $(3 + 2\sqrt{2})^k = x + y\sqrt{2}$들이며, 소문항 (i)의 사상은 단순히 $3 + 2\sqrt{2}$를 곱하는 것이다. 이것은 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$와 같은 환에서의 단원(unit) 이론과 연분수(continued fraction) 이론의 출발점이다. $a^2 + b^3 = c^4$과 같은 방정식은 일반화된 페르마 방정식(generalised Fermat equation) 연구에 속한다. 이 모든 것에 대한 아름다운 입문서로 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.