풀이

STEP II 2013, 문제 6

순수수학 • 수열의 수렴

> **STEP II 2013, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.2 절 극한으로서의 황금비에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/golden-limit.html

핵심 아이디어

항 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$는 결국 다가가는 극한(limit)의 위아래를 번갈아 오가므로, 수열(sequence) 전체는 단조(monotonic)가 아니고 정리(theorem)를 수열에 곧바로 적용할 수 없다. 그러나 한 항씩 건너뛰어 항을 뽑으면 두 개의 단조수열을 얻는다. 소문항 (i)이 이것을 보여 주는 도구이다. 분모가 양수이므로 차이 $u_{n+2} - u_n$의 부호가 바로 앞의 차이 $u_n - u_{n-2}$의 부호와 같다는 것이다.

풀이

먼저 모든 u_n이 양수임에 주목한다. $u_1 = 1 > 0$이고, $u_n > 0$이면 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n > 1 > 0$이다. 따라서 0으로 나누는 일은 결코 없고, $1 + u_n$과 같은 인수는 모두 양수이다.

소문항 (i)

$(*)$를 두 번 쓰면

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n-1}}, \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} - u_n}{u_n u_{n-2}}.$$

이다. (두 번째 식에는 u_{n-2}가 존재해야 하며, 이 때문에 $n \geq 3$이다.) 두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 두 음의 부호가 상쇄되어

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(u_n u_{n+1})(u_{n-2} u_{n-1})}.$$

을 얻는다. 끝으로 $(*)$에 u_n을 곱하면 $u_n u_{n+1} = u_n + 1$이고, 마찬가지로 $u_{n-2} u_{n-1} = u_{n-2} + 1$이다. 따라서

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(1 + u_n)(1 + u_{n-2})},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $u_1 = 1$이므로 $1 \leq u_1 \leq 2$는 참이다. $1 \leq u_n \leq 2$라고 가정하자. 양수의 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀌므로 $\frac{1}{2} \leq 1/u_n \leq 1$이고, 따라서

$$\tfrac{3}{2} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2,$$

이며, 이로부터 당연히 $1 \leq u_{n+1} \leq 2$이다. 귀납법에 의하여 모든 n에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$이다.

소문항 (iii)

홀수 번째 항. $u_1 = 1, u_3 = \frac{3}{2}$이므로 $u_3 - u_1 > 0$이다. 홀수 $n \geq 3$에 대하여, 소문항 (i)에 따르면 $u_{n+2} - u_n$은 $u_n - u_{n-2}$에 양수 $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$를 곱한 것이므로 부호가 같다. 귀납법에 의하여 모든 차이 $u_{n+2} - u_n$ (n은 홀수)은 양수이다. 즉 수열 $u_1, u_3, u_5, \ldots$는 증가한다. (ii)에 의하여 이 수열은 위로 2에 의해 유계(bounded)이므로, 정리에 의하여 어떤 극한 L로 수렴(converge)하며, 모든 항이 $[1, 2]$에 있으므로 $1 \leq L \leq 2$이다.

짝수 번째 항. 이번에는 $u_2 = 2, u_4 = \frac{5}{3}$이므로 $u_4 - u_2 < 0$이고, 같은 논증으로 $u_2, u_4, u_6, \ldots$가 감소함을 보일 수 있다. 이 수열은 아래로 1에 의해 유계이다.

> **생각해 보기** 정리는 위로 유계인 증가수열에 관한 것이다. 감소수열에는 이 정리를 어떻게 쓸 수 있을까?

부호를 바꾼 수열에 적용한다. $-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$는 증가하고 위로 -1에 의해 유계이므로 극한으로 수렴하고, 따라서 $u_2, u_4, \ldots$도 수렴한다. 그 극한을 M이라 하자. 이번에도 $1 \leq M \leq 2$이다.

극한 구하기. $(*)$를 두 번 적용하면 홀짝이 같은 항끼리 잇는 점화식(recurrence)을 얻는다.

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

생각해 보기 왜 u_{n+2}와 u_n을 그냥 L로 바꾸어도 될까?

홀수 n을 따라가면 u_n과 u_{n+2}가 모두 L로 수렴한다. 우변은 u_n의 연속함수(continuous function)이므로(분모는 적어도 2이다) $(2L+1)/(L+1)$로 수렴한다. 극한은 유일하므로

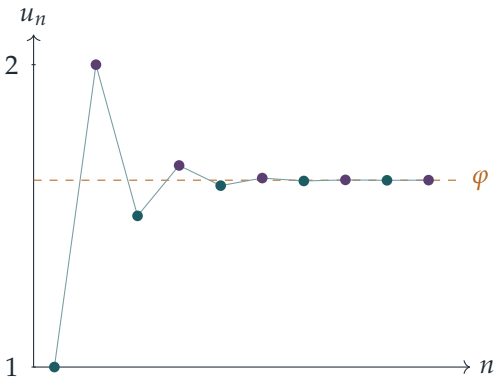
$$L = \frac{2L+1}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0,$$

이고, 따라서 $L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$이다. $L \geq 1$이므로 $L = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$일 수밖에 없다. M에 대해서도 똑같은 방정식이 성립하고 $M \geq 1$이므로

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right).$$

이다. 두 극한이 서로 다를 수도 있었지만(그렇다면 수열 전체는 진동할 것이다), 이 방정식의 근 가운데 1 이상인 것은 하나뿐이다.

수열 전체. $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$라 쓰고 $\varepsilon > 0$이라 하자. 홀수 $n > K_1$이면 항상 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$이 되는 K_1이 있고, 짝수 $n > K_2$이면 항상 같은 부등식이 성립하는 K_2가 있다. 그러면 모든 $n > \max(K_1, K_2)$에 대하여 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$이므로 $u_n \to \varphi$이다.



홀수 번째 항(청록색)은 φ를 향해 올라가고, 짝수 번째 항(자주색)은 같은 값을 향해 내려온다.

$u_1 = 3$에서 시작하는 경우

결론은 달라지지 않는다. 이제 $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{4}{3}$, $u_3 = \frac{7}{4}$, $u_4 = \frac{11}{7}$이다. 논증은 조금만 고치면 된다.

- 소문항 (i)은 $(*)$와 항들이 양수라는 사실만 썼고, 이 사실은 여전히 성립하므로 항등식도 여전히 참이다.

- 소문항 (ii)는 $n = 1$에서 성립하지 않지만, $1 \leq u_2 = \frac{4}{3} \leq 2$이고 귀납 단계는 그대로이므로 모든 $n \geq 2$에 대하여 $1 \leq u_n \leq 2$이다. 또 $u_1 = 3 \geq 1$이므로 모든 항은 적어도 1이다.
- 이번에는 $u_3 - u_1 = -\frac{5}{4} < 0$이고 $u_4 - u_2 = \frac{5}{21} > 0$이다. 따라서 홀수 번째 항은 감소하며 아래로 1에 의해 유계이고, 짝수 번째 항은 증가하며 위로 2에 의해 유계이다. 역할은 바뀌었지만 둘 다 여전히 수렴한다.
- 점화식 $u_{n+2} = (2u_n + 1)/(u_n + 1)$은 여전히 성립하고 두 극한 모두 적어도 1이므로, 둘 다 이번에도 φ이다.

따라서 수열은 여전히 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$로 수렴한다.

검산

$u_1 = 1$이면 항은 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$로 연속한 피보나치 수(Fibonacci numbers)의 비이며, $u_{10} = \frac{89}{55} \approx 1.61818$은 이미 $\varphi \approx 1.61803$에 매우 가깝다. $u_1 = 3$이면 항은 $3, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \ldots$ (뤼카 수(Lucas numbers)의 비)이고, 이 역시 1.61803에 다가간다. (i)의 항등식은 $n = 3$으로도 확인할 수 있다. $u_5 - u_3 = \frac{1}{10}$이고, $\dfrac{u_3 - u_1}{(1 + u_3)(1 + u_1)} = \dfrac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$이다.

흔한 실수

- 수열 전체가 수렴한다고 가정하고 곧바로 $L = 1 + 1/L$을 푸는 것. 그렇게 해도 올바른 값이 나오지만, 그것은 수렴성이 증명된 다음에야 의미가 있으며, 바로 그 증명이 이 문제의 요점이다.
- 근 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$를 잊는 것. 이 근은 반드시 배제해야 하며, 여기서는 $L \geq 1$로 배제한다.
- 감소하는 짝수 번째 부분수열(subsequence)에 어떻게 적용하는지(예를 들어 $-u_{2k}$를 통해) 밝히지 않고 정리를 적용하는 것.

STEP 너머

이 문제는 대학 1학년 해석학(analysis)의 전형적인 논증, 즉 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem), 부분수열, 그리고 홀수 번째 부분수열과 짝수 번째 부분수열이 같은 극한으로 수렴하면 수열 전체도 그 극한으로 수렴한다는 사실을 보여 주는 본보기이다.

사실 u_n은 연분수(continued fraction) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$의 n번째 근사분수(convergent)이고, 사상 $x \mapsto 1+1/x$는 φ 근처에서 축소사상(contraction)이다. 그래서 어떤 양수에서 시작하든 φ에 이르게 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 단조수열과 부분수열을 꼼꼼하게 다루고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 연분수를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.