풀이

STEP II 2013, 문제 5

순수수학 • 대칭성과 곡선의 개형

> **STEP II 2013, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q5

핵심 아이디어

함수가 $x \mapsto 1-x$나 $x \mapsto 1/x$ 같은 치환(substitution)에 대해 변하지 않으면, 그 항등식을 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하여 x에서의 기울기(gradient)와 상(image)이 되는 점에서의 기울기 사이의 관계를 얻을 수 있다. 치환에 의해 움직이지 않는 점, 즉 고정점(fixed point)에서는 기울기가 자기 자신의 음수와 같아야 하므로 0이다. (iii)의 방정식에서는 이 대칭성을 보고, 그 자체로 $x \mapsto 1-x$에 대해 변하지 않는 $u = x^2 - x$를 써서 모든 것을 나타내 볼 수 있다. 그러면 x에 대한 육차식(sextic)보다 훨씬 다루기 쉬운 u에 대한 삼차식(cubic)을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x)$를 x에 대해 미분(differentiate)하면, 우변에 연쇄법칙을 적용하여

$$\mathrm{f}'(x) = -\mathrm{f}'(1-x) \qquad \text{모든} x.$$

를 얻는다. $x = \frac{1}{2}$를 대입하면 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = -\mathrm{f}'(\frac{1}{2})$이므로 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$이다.

이제 $x \neq 0$에 대해 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1/x)$도 성립한다고 하자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$이므로 미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{f}'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

이다. 자기 자신의 역수(reciprocal)인 $x = -1$에서 이 식은 $\mathrm{f}'(-1) = -\mathrm{f}'(-1)$이 되므로 $\mathrm{f}'(-1) = 0$이다.

$x = 2$에서는 첫 번째 결과에 의해 $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{4}\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$이다. (마찬가지로, 첫 번째 항등식에 $x = 2$를 대입해도 $\mathrm{f}'(2) = -\mathrm{f}'(-1) = 0$을 얻는다.)

소문항 (ii)

x를 $1/x$로 바꾸자. 분자는

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3 = \frac{(1-x+x^2)^3}{x^6},$$

이 되고, 분모는

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{(1-x)^2}{x^4}.$$

이 된다. 나누고 $x^2(1-x)^2 = (x^2-x)^2$을 이용하면

$$\mathrm{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^6}\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2} = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \mathrm{f}(x).$$

이다. x를 $1-x$로 바꾸면 $(1-x)^2-(1-x) = (1-x)(-x) = x^2-x$이므로 x^2-x는 변하지 않고, 따라서 x^2-x+1도 변하지 않는다. 그러므로 $\mathrm{f}(1-x) = \mathrm{f}(x)$이다.

그래프 개형. (i)에 의해 $x=-1, \frac{1}{2}, 2$는 정류점(stationary point)이다. 정류점은 정확히 세 개이므로 이것이 전부이다. 각 점에서의 함숫값은

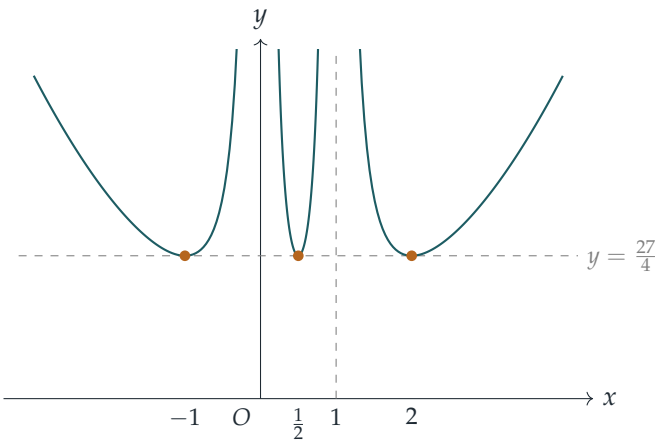
$$\mathrm{f}(-1) = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4}, \qquad \mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{(3/4)^3}{(1/4)^2} = \frac{27}{4}, \qquad \mathrm{f}(2) = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4}.$$

이다. 세 값은 모두 같으며, 당연히 그래야 한다. $\mathrm{f}(2) = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$이고 $\mathrm{f}(2) = \mathrm{f}(1-2) = \mathrm{f}(-1)$이기 때문이다.

그 밖의 특징은 다음과 같다.

- $x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$이므로 모든 곳에서 $\mathrm{f}(x) > 0$이다. 곡선은 x축과 만나지 않는다.
- $x \to 0$ 또는 $x \to 1$일 때 분자는 1로, 분모는 0^+로 가므로 양쪽에서 모두 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$이다. 즉 $x=0$과 $x=1$은 수직 점근선(vertical asymptote)이다.
- $|x|$가 클 때 $\mathrm{f}(x) \approx x^6/x^4 = x^2$이므로, $x \to \pm\infty$일 때 대략 포물선처럼 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$이다.

따라서 세 구간 $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$ 각각에서 함수는 연속(continuous)이고 양 끝에서 $+\infty$로 간다. 그러므로 각 구간에는 최솟값이 존재하며, 그 점은 정류점이다. 각 구간에는 $-1, \frac{1}{2}, 2$ 중 정확히 하나가 들어 있으므로 그 점이 최솟점이고, 다른 극점(turning point)은 없다. 각 가지는 U자 모양이며 가장 낮은 값은 $\frac{27}{4}$이다.



소문항 (iii)

방정식 $f(x) = \frac{27}{4}$**.** 그래프 개형에서 $\frac{27}{4}$는 모든 가지에서의 최솟값이며, 세 정류점에서만 그 값을 가진다. 따라서 근은

$$x = -1, \qquad x = \tfrac{1}{2}, \qquad x = 2,$$

이고, 정의역의 다른 모든 x, 즉

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2, \quad x > 2.$$

에 대해 $f(x) > \frac{27}{4}$이다. 이것을 대수적으로 확인할 수 있다. $u = x^2 - x$로 놓자(정의역에서 $u \neq 0$이다). 그러면 $f(x) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$이고

$$f(x) - \frac{27}{4} = \frac{4u^3 - 15u^2 + 12u + 4}{4u^2} = \frac{(u-2)^2(4u+1)}{4u^2}.$$

이다. $4u + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$이므로 이 값은 결코 음수가 아니며, $u = 2$일 때(즉 $x^2 - x - 2 = 0$이므로 $x = 2$ 또는 -1) 또는 $x = \frac{1}{2}$일 때에만 0이다.

? **생각해 보기** 육차방정식을 풀지 않고 $f(x) = \frac{343}{36}$의 근을 어떻게 추측할 수 있을까?

방정식 $f(x) = \frac{343}{36}$**.** $\frac{343}{36} = \frac{7^3}{6^2}$임에 주목하여, $x^2 - x + 1 = 7$이고 $x^2 - x = 6$인 x를 찾아본다. $x = 3$이면 둘 다 성립하므로 $f(3) = \frac{343}{36}$이다. 이제 대칭성 덕분에 다른 근들을 공짜로 얻는다. 3에 $x \mapsto 1 - x$와 $x \mapsto 1/x$를 반복하여 적용하면

$$3, \quad 1 - 3 = -2, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

을 얻는다. 이들은 서로 다른 여섯 개의 수이고, 분모를 없애면 $f(x) = \frac{343}{36}$은 육차 다항방정

식이 되므로 이것이 근의 전부이다.

$$x = -2,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ 3.$$

(u로 나타내면 방정식은 $36u^3 - 235u^2 + 108u + 36 = 0$이며, 이는 $(u-6)(9u+2)(4u-3) = 0$으로 인수분해(factorise)되어 쌍 $\{3,-2\}$, $\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$, $\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$를 준다.)

$\frac{343}{36} > \frac{27}{4}$이므로 수평선 $y = \frac{343}{36}$은 각 U자 모양 가지를 최솟점의 양쪽에서 한 번씩, 모두 두 번 자르며, 두 교점의 바깥쪽에서 가지는 직선보다 위에 있다. $(-\infty, 0)$ 위의 가지는 -2와 $-\frac{1}{2}$에서, $(0,1)$ 위의 가지는 $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$에서, $(1,\infty)$ 위의 가지는 $\frac{3}{2}$와 3에서 잘린다. 따라서 $\mathrm{f}(x) > \frac{343}{36}$일 필요충분조건은

$$x < -2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} < x < 1, \quad 1 < x < \tfrac{3}{2}, \quad x > 3.$$

이다.

검산

- 값을 하나 대입해 보자. $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = \dfrac{(7/4)^3}{(3/4)^2} = \dfrac{343/64}{9/16} = \dfrac{343}{36}$으로 주장한 대로이다.
- 주장한 구간 안의 점: $\mathrm{f}(4) = \frac{13^3}{12^2} \approx 15.3 > \frac{343}{36} \approx 9.53$이고, $\mathrm{f}(2) = 6.75$는 그 아래에 있으므로 $(\frac{3}{2}, 3)$이 제외된다는 것과 일치한다.
- 여섯 근은 합이 1인 쌍과 서로 역수인 쌍을 이루며, 이는 정확히 두 대칭성이 요구하는 바이다. 컴퓨터로 10^5개의 무작위 점에서 부등식을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(1/x)$를 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 인수 $-1/x^2$을 빠뜨리는 것. $x = -1$에서는 상관없지만, 2에서 기울기가 0이 되는 이유를 알려면 꼭 필요하다.
- 범위를 $x < -2$ 또는 $x > 3$처럼 하나의 구간으로 쓰고, $x = 0$과 $x = 1$의 점근선이 해집합을 나눈다는 것을 잊는 것. $x = 0$과 $x = 1$은 반드시 제외해야 한다.
- 정류점을 극댓점으로 착각하는 것. 모든 가지가 양 끝에서 $+\infty$로 가므로 이들은 극솟점이다.

STEP 너머

$x \mapsto 1 - x$와 $x \mapsto 1/x$로 생성되는 여섯 개의 사상은 군(group)을 이루며(삼각형의 대칭군과 동형(isomorphic)이다), f는 상수배를 제외하면 교차비(cross-ratio)의 고전적인 j-불

변량(j-invariant), 즉 여섯 사상 모두에 대해 변하지 않는 함수이다. 치환들의 군에 대해 불변인 함수는 갈루아 이론(Galois theory)과 타원곡선(elliptic curve) 이론의 핵심 주제이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이와 같은 변환군을 처음 만나기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.