풀이

STEP II 2013, 문제 4

순수수학 • 현의 중점의 자취

> **STEP II 2013, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q4

핵심 아이디어

현(chord)의 중점(midpoint)은 현의 양 끝점을 구하지 않고도 찾을 수 있다. P와 Q의 x좌표는 어떤 이차방정식(quadratic)의 근이고, 그 평균은 처음 두 계수의 비의 절반에 음의 부호를 붙인 값이다. 그다음에는 각 자취(locus)를 구하는 일이 매개변수(parameter)를 소거하는 문제가 된다. 모든 답은 기하학으로 설명된다. 원의 중심에서 현의 중점으로 그은 직선은 그 현에 수직(perpendicular)이다.

풀이

M의 좌표

직선은 $y = b(x-a)$이다. 이를 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하면

$$(1+b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - 1 = 0.$$

이 방정식의 근은 P와 Q의 x좌표 x_P, x_Q이므로, 근의 합(sum of the roots)에 의해

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{ab^2}{1+b^2}.$$

M은 직선 위에 있으므로 $y_M = b(x_M - a) = b \cdot \dfrac{ab^2 - a - ab^2}{1+b^2}$이고, 따라서

$$M = \left(\frac{ab^2}{1+b^2},\ -\frac{ab}{1+b^2} \right).$$

P와 Q가 존재하고 서로 다르려면 판별식(discriminant)이 양수여야 한다.

$$4a^2b^4 - 4(1+b^2)(a^2b^2 - 1) = 4(1 + b^2 - a^2b^2) > 0 \iff a^2b^2 < 1 + b^2.$$

(이는 O에서 직선까지의 거리 $|ab|/\sqrt{1+b^2}$가 1보다 작다는 뜻이다.) 각 소문항에서 이 조건이 필요하다.

소문항 (i)

$b > 0$을 고정하면

$$-by_M = -b \cdot \left(-\frac{ab}{1+b^2}\right) = \frac{ab^2}{1+b^2} = x_M,$$

따라서 자취 위의 모든 점에서 $x = -by$이며, 이것이 보여야 할 식이다. 이는 O를 지나고 기울기(gradient)가 $-1/b$인 직선으로, 핵심 아이디어에서 예측한 대로 현에 수직이다.

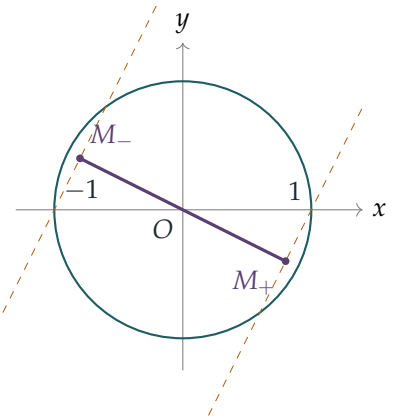
$-1 \le a \le 1$이면 $a^2b^2 \le b^2 < 1+b^2$이므로, 직선은 항상 원과 두 점에서 만나고 그러한 모든 a에 대해 M이 정의된다. M의 두 좌표는 모두 a에 상수를 곱한 것이므로, a가 $[-1,1]$ 위를 움직일 때 점 M은 직선 $x = -by$를 따라 $a = -1$에 해당하는 점에서 $a = 1$에 해당하는 점까지 고르게 움직인다. 따라서 자취는 다음 두 점을 잇는 선분(line segment)이다.

$$M_\pm = \pm\left(\frac{b^2}{1+b^2}, -\frac{b}{1+b^2}\right),$$

그 길이는

$$2\,\frac{\sqrt{b^4+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b}{(1+b^2)^{1/2}},$$

이다. 여기서 b^2의 제곱근을 구할 때 $b > 0$을 이용했다. 이것이 구하는 길이이다. 선분의 중심은 O이다. 끝점 M_+는 $(1,0)$을 지나는 현의 중점이고, M_-는 $(-1,0)$을 지나는 현의 중점이다. 그림은 $b = 2$인 경우로, 이때 양 끝점은 $\pm(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$이다.



점선은 $(\pm1,0)$을 지나고 기울기가 2인 양 끝의 현이다.

소문항 (ii)(a)

이제 a를 $0 < a < 1$인 값으로 고정한다. 그러면 $a^2b^2 < b^2 < 1 + b^2$이므로, $A = (a, 0)$을 지나는 모든 직선은 원과 두 점에서 만난다. M의 공식으로부터

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^4 + a^2b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{1+b^2} = a \cdot \frac{ab^2}{1+b^2} = ax.$$

따라서 M은 다음 원 위에 있다.

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \quad \text{즉} \quad (x - \tfrac{a}{2})^2 + y^2 = (\tfrac{a}{2})^2,$$

이것은 중심이 $(\frac{a}{2}, 0)$이고 반지름이 $\frac{a}{2}$인 원으로, OA를 지름(diameter)으로 한다.

? 생각해 보기 이 원 전체가 그려지는가?

꼭 그렇지는 않다. $x = ab^2/(1+b^2) = a - a/(1+b^2)$이므로 항상 $0 \le x < a$이고, 따라서 점 $A = (a, 0)$ 자체에는 결코 도달하지 않는다. 그 점에 도달하려면 A를 지나는 수직선이 필요한데, 수직선에는 기울기가 없다. 나머지 점에는 모두 도달한다. $b = \tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$로 두면

$$M = (a\sin^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta) = (\tfrac{a}{2} - \tfrac{a}{2}\cos 2\theta,\ -\tfrac{a}{2}\sin 2\theta),$$

이고, 2θ가 $(-\pi, \pi)$ 위를 움직일 때 이 점은 원을 한 바퀴 돌되, $2\theta = \pm\pi$에 해당하는 점, 곧 A만 빠진다. 따라서 자취는 OA를 지름으로 하는 원에서 한 점 A를 제외한 것이다. 기하학적으로 보면, OM은 현 AM에 수직이므로 $\angle OMA$는 직각이고 M은 OA를 지름으로 하는 원 위에 있다($b = 0$일 때는 $M = O$이다). 이 원은 단위원(unit circle) 안에 놓인다.

소문항 (ii)(b)

이제 $a = 1/b$이고 $0 < b \le 1$이다. 조건 $a^2b^2 < 1 + b^2$는 $1 < 1 + b^2$가 되며, 이는 성립한다. 직선은 $y = b(x - 1/b) = bx - 1$이므로 항상 단위원 위의 점 $B = (0, -1)$을 지난다. 따라서 B는 항상 P, Q 중 하나이다. 공식으로부터

$$M = \left(\frac{b}{1+b^2},\ -\frac{1}{1+b^2}\right), \qquad x^2 + y^2 = \frac{b^2+1}{(1+b^2)^2} = \frac{1}{1+b^2} = -y.$$

따라서 M은 다음 원 위에 있다.

$$x^2 + y^2 + y = 0, \quad \text{즉} \quad x^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2,$$

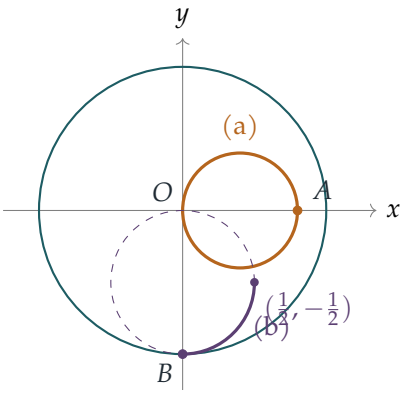
이것은 중심이 $(0, -\frac{1}{2})$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원으로, ((a)에서와 같은 직각 논리에 의해) OB를 지름으로 한다.

이번에는 원의 일부만 그려진다. $b = \tan\theta, 0 < \theta \le \frac{\pi}{4}$로 두면

$$M = (\tfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta),$$

이고 2θ는 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 위를 움직인다. 따라서 자취는 원의 4분의 1이다. 곧 포함되지 않는 점(그 점에 도달하려면 $b = 0$이어야 한다) $B = (0, -1)$에서 시계 반대 방향으로, 포함되는 점($b = 1$, $a = 1$일 때) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$까지의 호이다. 이 호 위에서 $0 < x \leq \frac{1}{2}$이고 $-1 < y \leq -\frac{1}{2}$이다.

그림은 (a)에서 $a = 0.8$로 두고 두 자취를 단위원과 함께 나타낸 것이다. 속이 빈 동그라미는 (a)에서 빠진 점 A와 (b)에서 빠진 끝점 B를 나타낸다.



(b)에서 실선으로 그린 호가 자취이고, 작은 원의 나머지 점선 부분에는 도달하지 않는다.

검산

- $a = 0$이면 직선이 O를 지나므로 현은 지름이 되고 M은 O여야 한다. 실제로 공식은 $(0, 0)$을 준다.
- (i)에서 $b = 1$이면, $(1, 0)$을 지나고 기울기가 1인 현은 $(1, 0)$과 $(0, -1)$을 잇고, 그 중점은 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$로 M_+와 일치한다. 이때 선분의 길이는 공식대로 $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$이다.
- 같은 현이 (ii)(b)에서 호의 $b = 1$ 쪽 끝을 주며, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$는 $x^2 + y^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$을 만족한다.
- (ii)(a)에서 $b = 1$이면 $M = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$으로, OA를 지름으로 하는 원의 가장 낮은 점이다. 45° 기울어진 현이라면 마땅히 그래야 한다.

흔한 실수

- 근의 공식(quadratic formula)으로 P와 Q를 직접 구하는 것. 이 방법도 통하지만, 근의 합을 쓰면 한 줄 만에 M을 얻는다.
- (ii)(a)나 (ii)(b)에서 원 전체가 자취라고 주장하는 것. 매개변수가 실제로 어떤 값을 가지는지, 그 값들이 어떤 점을 주는지 항상 확인해야 한다.

- 직선이 실제로 원과 만나는지 확인하지 않는 것. (i)과 (ii)의 두 경우 모두 항상 만나지만, 이를 밝혀 두어야 한다.

STEP 너머

평행한 현들의 중점이 중심을 지나는 한 직선 위에 있다는 사실은 모든 원뿔곡선(conic)에서 성립한다. 타원에서는 그 직선을 **켤레지름**(conjugate diameter)이라 하며, 이는 사영기하학의 극과 극선(poles and polars) 개념을 처음 엿보는 것이다. 소문항 (ii)의 원들은 반원에 대한 원주각은 직각이라는 고전적인 정리를 거꾸로 적용한 것이다. 자취와 매개변수화를 문제 해결 도구로 더 공부하고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*가 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.