풀이

STEP II 2013, 문제 3

순수수학 • 삼차식의 근

STEP II 2013, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 최고차항의 계수가 양수이고 서로 다른 세 실근을 갖는 삼차함수(cubic)의 모양에서 나온다. 그래프는 $-\infty$에서 올라오며 축을 아래에서 위로 지나고, 다시 내려왔다가, 또 한 번 아래에서 위로 축을 지난다. 값 $f(0) = c$는 0이 근들에 대해 어디에 있는지를 알려 주고, 극점(turning point)(이차방정식 $f'(x) = 0$의 근)은 두 근의 합과 곱으로 위치를 정할 수 있다. 마지막 소문항은 극점에 대한 조건만으로는 곡선이 실제로 축과 세 번 만난다는 것을 보장할 수 없음을 일깨워 준다.

풀이

이 풀이 전체에서

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, \qquad f'(x) = 3(x^2 + 2ax + b).$$

라 하자. $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha < \beta < \gamma$를 가지면 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 쓸 수 있으므로, 세 인수의 부호를 살펴보면

$$f(x) < 0 \text{ 구간: } (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma), \qquad f(x) > 0 \text{ 구간: } (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty).$$

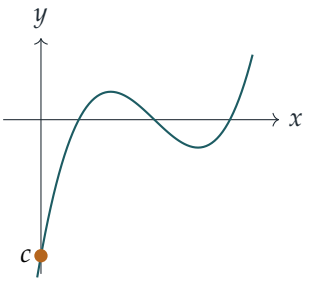
이다. 또한 롤의 정리(Rolle's theorem)에 의해 f'은 (α, β)에 영점을 하나, (β, γ)에 또 하나 갖는다. f'은 이차식이므로 다른 영점은 없고, 따라서 극점은

$$\alpha < p < \beta < q < \gamma.$$

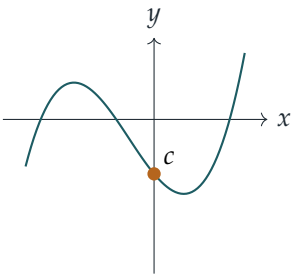
를 만족하는 $p < q$에 있다.

소문항 (i)

곡선 $y = f(x)$는 y축과 $(0, c)$에서 만나고, $c < 0$이므로 이 점은 x축 아래에 있다. 위의 부호 패턴에서 $f(0) < 0$이라는 것은 $0 < \alpha$이거나 $\beta < 0 < \gamma$라는 뜻이다. 이것이 아래의 두 그림이다.



세 근이 모두 양수



양수인 근이 정확히 하나

$0 < \alpha$이면 세 근이 모두 양수이다. $\beta < 0 < \gamma$이면 $\alpha < \beta < 0$이므로 양수인 근은 정확히 하나(γ)이다. $f(0) = c \neq 0$이므로 0인 근은 없다. 따라서 양수인 근이 정확히 하나이거나 세 근이 모두 양수이며, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 $0 < \alpha < \beta < \gamma$라 하자.

c의 부호. $0 < \alpha$이므로 점 0은 $f < 0$인 구간 $(-\infty, \alpha)$에 있다. 따라서 $c = f(0) < 0$이다.

극점. 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$은 서로 다른 두 실근 p, q를 가지므로 판별식(discriminant)이 양수이다.

$$4a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 > b.$$

$p > \alpha > 0$이고 $q > p$이므로 두 극점은 모두 양수이다. 이차식 $x^2 + 2ax + b$에서 두 근의 합과 곱은

$$p + q = -2a, \qquad pq = b.$$

이다. $p, q > 0$이므로 $-2a > 0$, 즉 $a < 0$이고, $b = pq > 0$이다. 이를 종합하면

$$a^2 > b > 0, \qquad a < 0, \qquad c < 0,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다.

(근으로부터 곧바로 $a < 0, b > 0, c < 0$을 얻을 수도 있다. $\alpha + \beta + \gamma = -3a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b$, $\alpha\beta\gamma = -c$가 모두 양수이기 때문이다. 하지만 $a^2 > b$는 정말로 극점이 필요하다.)

소문항 (iii)

이제 $c = f(0) > 0$이므로 0은 $f > 0$인 두 구간 (α, β) 또는 (γ, ∞)에 있다. 그러면 가능한 그림은 두 가지이다. $\alpha < 0 < \beta < \gamma$(음수인 근 하나, 양수인 근 둘)이거나 $\alpha < \beta < \gamma < 0$(세 근 모두 음수)이다.

? **생각해 보기** 조건 $ab < 0$으로 이 중 하나를 어떻게 배제할 수 있을까?

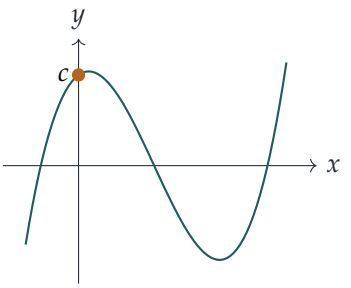
극점을 다시 살펴보자. 세 근이 모두 음수라면 $p < q < \gamma < 0$이므로 두 극점은 모두 음수이다. 그러면

$$-2a = p + q < 0 \quad \text{이고} \quad b = pq > 0,$$

이므로 $a > 0, b > 0$이 되어 $ab > 0$이다. 이것은 $ab < 0$에 모순이다. 따라서 두 번째 그림은 불가능하고,

$$\alpha < 0 < \beta < \gamma :$$

한 근은 음수이고 나머지 두 근은 양수이다.



이 경우는 실제로 일어날 수 있다. 예를 들어 근 $-1, 2, 5$로부터 $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$을 얻으므로 $a = -2, b = 1, c = 10$이고, $ab = -2 < 0, c > 0$이다. 위에 그린 곡선이 바로 이것이다.

소문항 (iv)

? **생각해 보기** 삼차방정식이 세 실근을 가지려면 $(*)$ 외에 어떤 조건이 더 필요할까?

조건 $(*)$는 극점과 $f(0)$의 부호만을 제어한다. 세 실근을 가지려면 극댓값(local maximum)도 축보다 위에 있어야 한다. 따라서 a와 b를 두 극점이 양수가 되도록 고른 다음, c를 충분히 작은 음수로 잡아 극댓값을 축 아래로 끌어내리면 된다.

$a = -1, b = \frac{3}{4}$로 잡으면

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x + \tfrac{3}{4}) = 3(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{3}{2}).$$

이다. 극대는 $x = \frac{1}{2}$에서 일어나고, 그 값은

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{8} + c = \tfrac{1}{2} + c.$$

이다. $c = -1$로 고르자. 그러면 방정식은

$$x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{4}x - 1 = 0 \qquad (a = -1,\ b = \tfrac{3}{4},\ c = -1),$$

이고, $a^2 = 1 > \frac{3}{4} = b > 0$, $a < 0$, $c < 0$이므로 $(*)$가 성립한다.

이제 근의 개수를 세어 보자. f는 $(-\infty, \frac{1}{2}]$에서 증가하므로 이 구간에서 $f(x) \le f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$이다. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$에서 f는 감소하므로 계속 $-\frac{1}{2}$보다 작다. $[\frac{3}{2}, \infty)$에서 f는 $f(\frac{3}{2}) = -1$에서 $+\infty$까지 증가하므로 축을 정확히 한 번 지난다. 따라서 실근은 정확히 하나이다($f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{23}{4}$이므로 이 근은 2와 3 사이에 있다).

검산

- 삼차식 $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$은 $a = -2$, $b = \frac{11}{3}$, $c = -6$이고, 소문항 (ii)의 예측대로 실제로 $a^2 = 4 > \frac{11}{3} > 0$이다.
- 곡선을 $x \mapsto -x$로 대칭이동하면 근 α, β, γ가 $-\alpha, -\beta, -\gamma$로 바뀌고, a와 c의 부호는 바뀌지만 b의 부호는 바뀌지 않는다. 따라서 ab와 c의 부호가 모두 바뀌며, 소문항 (i)을 대칭이동한 결과는 $c > 0$일 때 음수인 근이 정확히 하나이거나 세 근이 모두 음수라는 것이다. 이것이 바로 소문항 (iii)에서 출발한 두 그림이다.
- 소문항 (iv)에서 유일한 실근은 $x \approx 2.178$이다. 서로 다른 세 실근을 갖는 무작위 삼차식 수천 개를 컴퓨터로 확인한 결과도 소문항 (i)–(iii)과 일치했다.

흔한 실수

- 근의 부호만으로 $a^2 > b$를 증명하려는 것. 이 부등식은 극점이 서로 다른 실수라는 사실에서 나온다.
- $(*)$가 세 양수 근과 **동치**라고 가정하는 것. 소문항 (iv)는 이것이 필요조건(necessary)일 뿐 충분조건(sufficient)이 아님을 보여 준다.
- 소문항 (iv)에서 극솟값은 음수이지만 극댓값은 여전히 양수가 되도록 c를 고르는 것. 그러면 근이 하나가 아니라 셋이 된다.

STEP 너머

여기서 쓴 부호 논증은 일반 이론의 출발점이다. 데카르트(Descartes)의 부호 규칙(rule of signs)은 양수인 근의 개수를 계수의 부호 변화 횟수로 위에서 제한하고, 슈투름(Sturm)의 정리는 구간 안의 실근 개수를 정확히 센다. 삼차식의 경우 소문항 (iv)에서 놓친 조건은 판별식의 부호이며, 판별식은 (양의 상수배를 무시하면) 극점에서의 값의 곱 $-f(p)f(q)$이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대학 1학년 수준에서 다항식과 그 근을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.