풀이

STEP II 2013, 문제 2

순수수학 • 점화 공식

> **STEP II 2013, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q2

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $x^n(1-x)^n$은 반사 변환 $x \mapsto 1-x$에 대하여 대칭(symmetric)이고, 이 대칭성 덕분에 x와 $1-x$의 역할을 공짜로 맞바꿀 수 있다. 그다음 부분적분(integration by parts)으로 x의 거듭제곱을 $1-x$의 거듭제곱으로 바꾸고, 항등식 $x+(1-x)=1$을 이용하면 곱을 이미 알고 있는 적분들로 다시 쪼갤 수 있다. 이 둘을 합치면 축소 공식(reduction formula)을 얻는데, 이 공식을 풀어 나가면 자연수 n에 대해서는 계승(factorial)이 나오고, 반정수(half-integer)에 대해서도 그대로 성립한다.

풀이

소문항 (i)

$n \geq 1$에 대하여 $J_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x$라 하자. $u = 1-x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이고 적분 구간의 끝 $0, 1$은 $1, 0$이 된다:

$$J_n = \int_1^0 (1-u)^{n-1}u^n\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

이것이 바로 구하는 등식이다(적분 변수(dummy variable)의 이름은 상관없다).

J_n의 서로 같은 두 표현을 더하면

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^1 \left[x^{n-1}(1-x)^n + x^n(1-x)^{n-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}[(1-x)+x]\mathrm{d}x = I_{n-1}. \end{aligned}$$

다음으로 $u = x^n$, $\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$로 두고 I_n을 부분적분한다. 이때 $v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$이

므로

$$I_n = \Big[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

경계항(boundary term)은 양 끝에서 모두 0이 된다. $x=1$에서는 $(1-x)^{n+1}$ 때문이고, $x=0$에서는 $n \geq 1$이므로 x^n 때문이다. 따라서 문제에 주어진 공식

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x$$

를 얻는다.

? **생각해 보기** 이 적분에서 어떻게 다시 I_n과 I_{n-1}로 돌아갈 수 있을까?

$1-x$ 인수 하나를 떼어 내고 그것을 글자 그대로 $1-x$로 쓴다:

$$x^{n-1}(1-x)^{n+1} = x^{n-1}(1-x)^n\,(1-x) = x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^n.$$

적분하면 앞의 결과에 의해 우변은 $J_n - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - I_n$이 된다. 그러므로

$$I_n = \frac{n}{n+1}\Big(\tfrac{1}{2}I_{n-1} - I_n\Big) \quad\Longrightarrow\quad I_n \cdot \frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}I_{n-1},$$

이고, 양변에 $\dfrac{n+1}{2n+1}$을 곱하면

$$I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,I_{n-1}$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 논증 어디에서도 n이 정수라는 사실을 쓰지 않았음에 주목하자. 필요한 것은 $n \geq 1$뿐이었다(경계항을 위해서, 그리고 모든 피적분함수가 $[0,1]$에서 연속이 되도록 하기 위해서). 이 사실을 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (ii)

$I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. $n=0$에서 시작하면 $I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 = \dfrac{(0!)^2}{1!}$이다. $n \geq 1$일 때 $n-1$에 대하여 공식이 성립한다고 가정하자. 그러면 소문항 (i)에 의해

$$\begin{aligned} I_n = \frac{n}{2(2n+1)} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} &= \frac{n^2((n-1)!)^2}{2n(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 분자와 분모에 n을 곱하고 $2n(2n+1)(2n-1)! = (2n+1)!$을 이용하였다. 이로써 귀납법이 완성되므로, 공식은 모든 양의 정수 n에 대하여(그리고 $n=0$에 대해서도) 성립한다.

소문항 (iii)

$x = \sin^2\theta$로 두면 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$이고, θ는 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지 움직인다. 이 구간에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$는 음이 아니므로

$$(x(1-x))^{1/2} = (\sin^2\theta\cos^2\theta)^{1/2} = \sin\theta\cos\theta.$$

생각해 보기 여기서 왜 $\sin\theta\cos\theta \geq 0$이 필요할까?

$\sqrt{t^2} = |t|$이지 t가 아니기 때문이다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서는 절댓값 기호를 그냥 떼어 내도 된다. 따라서

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{4}\Big[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$I_{\frac{3}{2}}$를 구하기 위해 소문항 (i)의 축소 공식에 $n = \frac{3}{2}$를 대입한다. $\frac{3}{2} \geq 1$이고 유도 과정에서 n이 정수일 필요가 전혀 없었으므로 이렇게 해도 된다:

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3/2}{2\cdot 4} I_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{128}.$$

검증을 위해 같은 치환으로 직접 계산하면

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{128},$$

이다. 여기서 $\sin^4\phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$를 이용하였다.

검산

- $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$이고, 공식으로는 $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$이다. 마찬가지로 $I_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{4}{5!}$이다.
- $I_{\frac{1}{2}}$는 반지름이 $\frac{1}{2}$인 반원 $y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ 아래의 넓이이므로 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$이다.
- 수치적으로 $I_{\frac{3}{2}} \approx 0.073631$로 $3\pi/128$과 일치한다. 또한 $n = 2.7$과 같은 정수가 아닌 n에 대해서도 축소 공식이 성립함을 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 부분적분에서 경계항이 0이 되는지, 특히 $x = 0$에서 그런지 확인하는 것을 잊는다.
- $[0, \frac{\pi}{2}]$에서의 부호를 언급하지 않고 $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$라고 쓴다.

- 정수에 대해서만 증명된 소문항 (ii)의 계승 공식으로 $I_{\frac{3}{2}}$를 계산한다. 축소 공식을 쓰는 것이 안전한 방법이다.

STEP 너머

I_n은 베타 함수(beta function) $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$의 특수한 경우로, $I_n = B(n+1, n+1)$이다. 소문항 (ii)는 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$의 정수인 경우이다. 이 항등식에 $n = \frac{1}{2}$를 넣으면 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$를 다시 얻는데, 이것이 소문항 (iii)에 π가 나타나는 더 깊은 이유이다. 이런 적분들은 통계학의 베타 분포(beta distribution)와 π에 대한 월리스(Wallis)의 곱 공식의 바탕에 깔려 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 흐름의 축소 공식 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.