풀이

STEP II 2013, 문제 11

역학 • 연속 충돌

> **STEP II 2013, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q11

핵심 아이디어

이 문제의 모든 충돌(collision)은 질량이 같은 두 입자 사이에서 일어나므로, 각각은 똑같은 작은 계산이다. 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)이다. 일반적인 경우를 한 번 계산해 두고 그것을 다시 사용하면 된다. 다음 충돌이 일어나는지는 결국 뒤에 있는 입자가 앞에 있는 입자보다 빠르게 움직이는지의 문제이므로, 문제 전체가 속도를 비교하는 일로 귀결된다.

풀이

입자들을 매끄러운 면 위에 놓인 질량 m의 동일한 입자로 모형화한다. 그러면 충돌과 충돌 사이에는 수평 방향의 힘이 작용하지 않으므로 각 입자는 등속도로 움직인다. 직선을 따라 순서대로 입자를 A, B, C라 하고, A를 B와 C 쪽으로 쏘아 보낸 입자로 둔다. A의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



일반적인 충돌

속도가 p인 입자가 자기 앞에서 속도 $q < p$로 움직이는 동일한 입자를 따라잡아 충돌하고, 충돌 후 두 입자의 속도가 각각 p'과 q'이 된다고 하자. 운동량 보존(m을 약분한다)과 반발 법칙에 의해

$$p' + q' = p + q, \qquad q' - p' = e(p - q).$$

두 식을 더하고 빼면

$$p' = \tfrac{1}{2}[(p+q) - e(p-q)], \qquad q' = \tfrac{1}{2}[(p+q) + e(p-q)]. \qquad (*)$$

$e > 0$이고 $p > q$이므로 항상 $q' > p'$이다. 즉 충돌 후에는 앞의 입자가 뒤의 입자보다 빠르게 움직이므로, 다른 무언가가 둘 중 하나의 속도를 바꾸지 않는 한 그 두 입자는 다시 만날 수 없다.

소문항 (i)

첫 번째 충돌 (A가 B와 충돌): $(*)$에 $p = u, q = 0$을 대입하면

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

이제 $v_B > v_A$이므로 A는 B를 따라잡을 수 없다. 그러나 B는 정지해 있는 C를 향해 움직이므로, 두 번째 충돌은 B와 C 사이에서 일어난다.

두 번째 충돌 (B가 C와 충돌): $p = \tfrac{1}{2}u(1+e), q = 0$을 대입하면

$$v_B = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}u(1+e)(1-e) = \tfrac{1}{4}u(1-e^2), \qquad v_C = \tfrac{1}{4}u(1+e)^2.$$

A는 아무 영향도 받지 않았으므로 여전히 $v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e)$이다. ($0 < e < 1$이므로) 세 속도가 모두 양수이고, 따라서 속력은 요구한 대로 $\tfrac{1}{2}u(1-e)$, $\tfrac{1}{4}u(1-e^2)$, $\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$이다.

세 번째 충돌. ($(*)$에 의해) C가 B보다 빠르므로 B와 C는 멀어진다. 다음으로 가능한 충돌은 A가 B를 따라잡는 것뿐이며, 이는 정확히 $v_A > v_B$일 때 일어난다.

$$v_A - v_B = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2-(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2 > 0,$$

$e \neq 1$이기 때문이다. 따라서 A는 B 뒤에서 B보다 빠르게 움직이므로, $0 < e < 1$인 모든 e에 대하여 세 번째 충돌(A와 B)이 일어난다.

소문항 (ii)

세 번째 충돌 (A가 B와 충돌): 이때 $p = \tfrac{1}{2}u(1-e)$이고 $q = \tfrac{1}{4}u(1-e^2)$이므로

$$p+q = \tfrac{1}{4}u(1-e)[2+(1+e)] = \tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e), \qquad p-q = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2.$$

$(*)$에 의해 B의 새로운 속도는

$$\begin{aligned} v_B &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e) + \tfrac{1}{4}eu(1-e)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e+e-e^2] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+2e-e^2) = \tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e), \end{aligned}$$

이고, (완전성을 위해 덧붙이면) $v_A = \tfrac{1}{8}u(1-e)[3+e-e(1-e)] = \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+e^2)$이며, 이는 v_B보다 작다.

생각해 보기 세 번째 충돌 후에 다시 충돌할 가능성이 있는 쌍은 어느 것인가?

A와 B는 방금 충돌했으므로 $(*)$에 의해 B가 A보다 빠르고, 두 입자는 멀어지고 있다. C는 여전히 $\frac{1}{4}u(1+e)^2$로 움직이고 있으며, C 너머에는 아무것도 없다. 따라서 네 번째 충돌은 B가 C를 따라잡을 때, 그리고 그때에만 일어난다. 즉 $v_B > v_C$일 필요충분조건이다. $\frac{1}{8}u(1+e) > 0$으로 나누면

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e) > \tfrac{1}{4}u(1+e)^2 &\iff (1-e)(3-e) > 2(1+e)\\ &\iff e^2 - 6e + 1 > 0.\end{aligned}$$

이차식 e^2-6e+1의 근은 $e = 3 \pm 2\sqrt{2}$이고, 두 근의 바깥에서 양수이다. 큰 근 $3+2\sqrt{2}$는 1보다 크고, $3-2\sqrt{2} \approx 0.172$는 $(0,1)$에 속한다. 따라서 $0 < e < 1$일 때

$$\text{네 번째 충돌이 일어난다} \iff e < 3-2\sqrt{2}.$$

정확히 $e = 3-2\sqrt{2}$이면 B와 C가 같은 속도로 움직여 결코 만나지 않으므로, 부등호는 등호를 포함하지 않는다.

검산

- 운동량: 두 번째 충돌 후 운동량의 합은 $\frac{1}{4}u\left[2(1-e)+(1-e^2)+(1+e)^2\right] = \frac{1}{4}u \cdot 4 = u$로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- 극한의 경우: $e \to 1$이면 두 번의 충돌 후 속도는 $0, 0, u$로 다가가고(익숙한 "뉴턴의 요람(Newton's cradle)" 식의 교환이다) $v_A - v_B \to 0$이므로, 세 번째 충돌은 가까스로 일어난다. 임계값 $3-2\sqrt{2}$가 1보다 훨씬 작다는 것은 이와 들어맞는다.
- 수치로 확인하면, $e = 0.1$일 때 세 번째 충돌 후 속도는 $v_B \approx 0.3589u$, $v_C = 0.3025u$이므로 B는 C를 따라잡는다. $e = 0.2$이면 $v_B = 0.336u < v_C = 0.36u$이므로 따라잡지 못한다. 운동을 컴퓨터로 시뮬레이션해 보니 $e > 0.1716$인 모든 경우에는 정확히 세 번, 그보다 작은 경우에는 적어도 네 번 충돌이 일어남이 확인되었다.

흔한 실수

- 다음에 어느 쌍이 충돌하는지 정당화하는 것을 잊는다. 매번 방금 충돌한 두 입자가 멀어지고 있는지, 그리고 나머지 쌍이 가까워지고 있는지 확인해야 한다.
- 반발 법칙에서 부호를 틀린다. 법칙은 (멀어지는 속력) $= e \times$ (가까워지는 속력)이므로, 좌변에 앞 입자의 속도를 먼저 써서 $q' - p' = e(p-q)$이다.
- 허용 범위 $0 < e < 1$을 벗어나는 근 $3+2\sqrt{2}$를 그대로 남겨 둔다.

STEP 너머

규칙 $(*)$는 충돌 전 속도의 쌍을 충돌 후 속도의 쌍으로 보내는 선형 사상(linear map)이므로, 연속된 충돌은 행렬(matrix)의 곱이 된다. 충돌이 모두 몇 번 일어나는지 묻는 것은 고전적인 문제로, 탄성(elastic) 당구공 계에 대해서는 운동을 쐐기 모양 영역 안의 직선으로 "펼쳐서" 얻는 아름다운 기하학적 답이 있다. 충돌, 운동량, 기준틀을 대학 수준의 엄밀함으로 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.