풀이

STEP II 2013, 문제 10

역학 • 포물체 운동

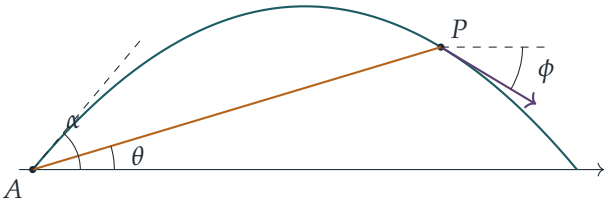
STEP II 2013, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q10

핵심 아이디어

시각 t에서의 위치와 속도(velocity)를 적어 보면 $\tan\theta$와 $\tan\phi$가 모두 t에 대한 일차식(*linear*)이라는 것을 알 수 있다. 그러면 (i)의 항등식(identity)이 곧바로 나오고, 이 항등식 덕분에 B와 C에 대한 조건이 모두 각의 탄젠트에 대한 명제로 바뀐다. 두 각은 시간이 지남에 따라 꾸준히 감소하므로 "어느 쪽이 먼저인가"는 두 수의 비교일 뿐이며, (i)을 이용하면 이 비교를 한 점 B에서만 하면 된다.



일반적인 점 P에서 θ는 A에서 바라본 P의 앙각(angle of elevation)이고, ϕ는 속도가 수평선과 이루는 각이다(그림에서는 입자가 떨어지고 있으므로 음수이다).

풀이

입자는 공기 저항(air resistance) 없이 중력 g만 받으며 자유롭게 운동한다고 모형화한다. 시각 $t = 0$에 속력 u로 던져졌다고 하고, $0 < \alpha < 90°$라 하자. A를 원점으로 잡으면 시각 t에서

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad \dot{x} = u\cos\alpha, \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt.$$

입자는 다시 $y = 0$이 될 때, 즉 $t = 2u\sin\alpha/g$에 착지한다.

소문항 (i)

$t > 0$일 때 A에서 바라본 입자의 앙각은

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{2u\cos\alpha},$$

를 만족하고, 운동 방향은

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}.$$

를 만족한다. 첫 번째 식을 두 배 하고 두 번째 식을 이용하면

$$2\tan\theta = 2\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha + \left(\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}\right) = \tan\alpha + \tan\phi,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

나중에 쓸 내용을 적어 두면 좋다. $k = \dfrac{g}{u\cos\alpha} > 0$이라 두면

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tfrac{1}{2}kt, \qquad \tan\phi = \tan\alpha - kt, \tag{$*$}$$

이므로 시간이 지남에 따라 $\tan\theta$와 $\tan\phi$는 모두 순감소한다. 비행하는 동안 θ는 α에서 0까지, ϕ는 α에서 $-\alpha$까지 감소하므로 $\theta = \frac{1}{2}\alpha$와 $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$는 각각 정확히 한 번씩 일어난다. 따라서 B와 C는 잘 정의된다.

소문항 (ii)

$T = \tan\frac{1}{2}\alpha$라 하자. $0 < \frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$이므로 $0 < T < 1$이다. B에서는 $\tan\theta = T$이다. C에서는 $\tan\phi = \tan(-\frac{1}{2}\alpha) = -T$이다. B와 C가 같은 점이면 그 점에서 두 식이 모두 성립하므로 (i)에 의해

$$2T = \tan\alpha - T, \qquad \text{즉} \qquad \tan\alpha = 3T.$$

배각 공식(double-angle formula)에 의해 $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$이므로

$$\frac{2T}{1-T^2} = 3T \implies 2 = 3(1-T^2) \implies T^2 = \tfrac{1}{3},$$

이다. 여기서 T로 나누었는데, $T > 0$이므로 이는 허용된다. 양의 근을 택하면 $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$이고

$$\alpha = 60^\circ.$$

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 두 시각을 직접 계산하지 않고 어느 점에 먼저 도달하는지 어떻게 알 수 있을까?

$(*)$에 의해 ϕ는 비행하는 내내 감소한다. 따라서 C가 B보다 **나중에** 오는 것은 입자가 B에 있는 순간 ϕ가 아직 $-\frac{1}{2}\alpha$까지 떨어지지 않았을 때, 즉 B에서의 운동 방향을 ϕ_B라 할 때 $\tan\phi_B > -T$일 때와 정확히 같다.

B에서 소문항 (i)에 의해 $\tan\phi_B = 2\tan\theta - \tan\alpha = 2T - \tan\alpha$이다. 따라서

$$B\text{에 먼저 도달한다} \iff 2T - \tan\alpha > -T \iff \tan\alpha < 3T.$$

다시 $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$를 이용하고, $T > 0$으로 나누고 $1 - T^2 > 0$을 곱하면(부등호의 방향은 그대로이다)

$$\frac{2T}{1-T^2} < 3T \iff 2 < 3 - 3T^2 \iff T^2 < \tfrac{1}{3} \iff \tfrac{1}{2}\alpha < 30^\circ,$$

이다. 마지막 단계는 tan가 $(0^\circ, 45^\circ)$에서 증가하기 때문이다. 모든 단계가 역으로도 성립하므로

$$\alpha < 60^\circ \iff C\text{보다 } B\text{에 먼저 도달한다.}$$

따라서 $\alpha < 60^\circ$이면 입자는 B에 먼저 도달한다.

시각을 직접 구하고 싶다면 $(*)$로부터 $kt_B = 2(\tan\alpha - T)$, $kt_C = \tan\alpha + T$이고, $t_B < t_C$는 역시 $\tan\alpha < 3T$와 동치이다.

검산

- $t = 0$에서 $(*)$의 두 식은 모두 $\tan\alpha$가 되는데, 이는 당연하다. 발사 직후 입자는 발사선을 따라 움직이기 때문이다. 착지할 때는 $kt = 2\tan\alpha$이므로 $\tan\theta = 0$, $\tan\phi = -\tan\alpha$가 되어, 익숙한 궤적의 대칭성이 나타난다.
- $\alpha = 60^\circ$일 때 $\tan\alpha = \sqrt{3} = 3\tan 30^\circ$이므로 (ii)와 일치한다.
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\alpha = 45^\circ$일 때 공식에서 $t_B \approx 0.845\,\mathrm{s}$, $t_C \approx 1.020\,\mathrm{s}$를 얻으므로 B가 먼저이다. 컴퓨터로 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보아도 같은 시각이 나오며, $\alpha = 61^\circ, 75^\circ, 85^\circ$에서는 C가 먼저라는 것도 확인된다.

흔한 실수

- θ(A**에서 본** 입자의 방향)를 ϕ(입자의 **속도**의 방향)인 것처럼 다루는 것. 두 각은 발사하는 순간에만 같다.

- C에서 부호를 틀리는 것. 그곳에서는 $\tan\phi = -\tan\frac{1}{2}\alpha$이지 $+\tan\frac{1}{2}\alpha$가 아니다.
- (iii)에서 "$\tan\phi_B > -T$"가 왜 B가 먼저라는 뜻인지 설명하지 않고 답만 주장하는 것. 이를 정당화하는 것은 ϕ의 단조감소(monotonic decrease)이다.

STEP 너머

(i)의 항등식은 A에서 포물선(parabola) 위의 임의의 점까지 그은 현(chord)의 기울기가 양 끝점에서의 접선의 기울기의 평균과 같다는 뜻이며, 이는 이차함수의 특별한 성질이다(평균값 정리(mean value theorem)에서 그 점이 정확히 중점으로 정해지는 경우이다). 대학 1학년 역학 강의에서는 경사면(inclined plane) 위의 포물체(projectile) 운동을 공부할 때 같은 아이디어를 만나게 되는데, 그때 발사점에서 그은 직선의 각이 여기서의 θ와 정확히 같은 역할을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 문제를 이처럼 꼼꼼하게 다루는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.