풀이

STEP II 2013, 문제 1

순수수학 • 로그 함수의 현

> **STEP II 2013, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q1

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.5 절 π^e인가, e^π인가?에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/pi-e-or-e-pi.html

핵심 아이디어

여기 나오는 부등식은 모두 p^q와 q^p의 비교이다. 로그를 취하고 pq로 나누면 이는 $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$의 비교가 되는데, $\frac{\ln x}{x}$는 원점에서 곡선 위의 점 $(x, \ln x)$까지 그은 직선의 기울기이다. 따라서 모든 것은 $y = \ln x$와 만나는 직선과 현(chord)에 관한 문제이다. 필요한 사실은 이 곡선이 위로 볼록(concave)하다는 것(아래쪽으로 휘어진다는 것)과, 원점에서 그은 접선(tangent)이 $x = \mathrm{e}$에서 곡선에 접한다는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$y = mx$가 $x = x_0$에서 $y = \ln x$에 접한다고 하자. 기울기가 같고 두 곡선이 만나므로

$$m = \frac{1}{x_0}, \qquad mx_0 = \ln x_0.$$

첫 번째 식에서 $mx_0 = 1$이므로 $\ln x_0 = 1$, $x_0 = \mathrm{e}$이고

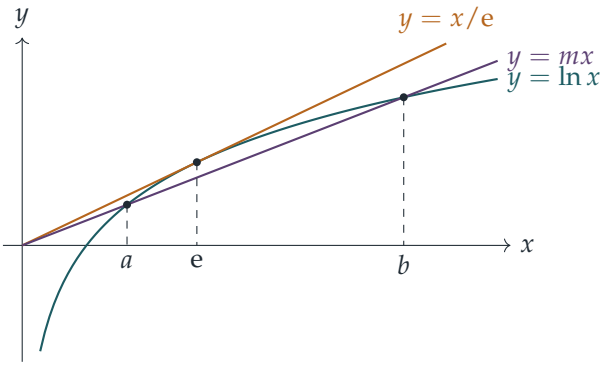
$$m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

이제 $y = mx$가 곡선과 $x = a$와 $x = b$에서 만난다고 하자. 그러면 $\ln a = ma$, $\ln b = mb$이

므로 ($a, b > 0$이므로)

$$\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b} \implies b\ln a = a\ln b \implies \ln\left(a^b\right) = \ln(b^a)\,,$$

이고, ln은 일대일(one-to-one)이므로 $a^b = b^a$이다. 이것이 증명하려던 것이다.



그림에 대하여: $m \le 0$이면 $\ln x - mx$가 순증가하므로 직선은 곡선과 많아야 한 번 만난다. $m \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$이면 $x > 0$에서 직선은 접선이거나 접선보다 위에 있고, 위로 볼록한 곡선은 접선 $y = x/\mathrm{e}$의 아래에 있으면서 e에서만 접하므로 이번에도 교점이 두 개일 수 없다. 따라서 $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$이고, 그림과 같이 직선 $y = mx$는 접선 아래에 있다. $x = \mathrm{e}$에서 곡선의 높이는 1이고 직선의 높이는 $m\mathrm{e} < 1$이므로, 그곳에서 곡선은 직선보다 위에 있다. 곡선은 위로 볼록하고 직선은 곧으므로 $\ln x - mx$는 위로 볼록하다. 따라서 이 함수가 양수인 집합은 하나의 구간이고, 그 양 끝점은 두 교점 a와 b이다. 이 구간은 e를 포함하므로 $a < \mathrm{e} < b$이다.

소문항 (ii)

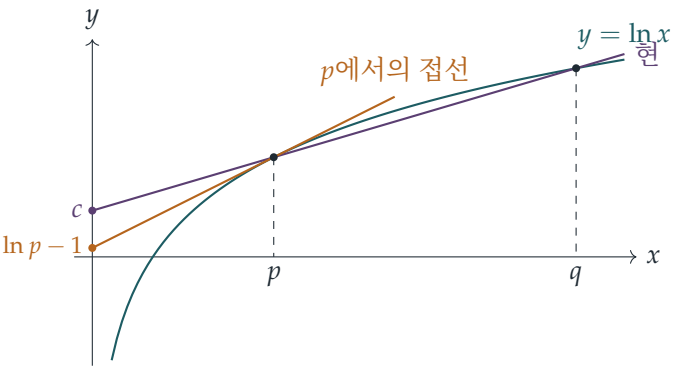
여기서 $0 < p < q$이고 $\ln p = mp + c$, $\ln q = mq + c$이다. 각각 p와 q로 나누면

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

$c > 0$이고 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$이므로 $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$이고, 따라서 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$이다. 양변에 $pq > 0$을 곱하면 $q\ln p > p\ln q$, 즉 $\ln(p^q) > \ln(q^p)$이므로 $p^q > q^p$이다.

그림으로 보면, 원점에서 $(p, \ln p)$와 $(q, \ln q)$까지 그은 직선의 기울기는 각각 $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$이다. 현이 원점보다 위에서 y축과 만나면, 더 가까운 점이 O에서 더 가파른 직선을 만든다. (c의 부호가 부등식의 방향을 결정한다. 이 사실은 소문항 (iv)에서 다시 쓴다.)

소문항 (iii)



$P = (p, \ln p)$와 $Q = (q, \ln q)$를 지나는 현의 기울기를 s, y절편을 c라 하면 $c = \ln p - sp$이다. 곡선이 위로 볼록하므로, P에서 더 오른쪽의 점까지 그은 현은 P에서의 접선보다 덜 가파르다. 따라서

$$s < \frac{1}{p}.$$

(또는 평균값 정리(mean value theorem)에 의해 어떤 $\xi \in (p, q)$에 대하여 $s = \frac{1}{\xi}$이고 $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{p}$이다.) P에서의 접선은 $y = \ln p + \frac{1}{p}(x - p)$이고, 이 접선은 y축과 $\ln p - 1$에서 만난다. 현과 접선은 모두 P를 지나고 현이 덜 가파르다. 따라서 P에서 왼쪽으로 $x = 0$까지 이동하는 동안 현은 접선보다 위에 있다.

$$c = \ln p - sp > \ln p - 1 \geq 0,$$

마지막 단계에서 $p \geq \mathrm{e}$를 사용했다. 따라서 현은 y가 양수인 점에서 y축과 만난다.

생각해 보기 이것으로 π^{e}와 e^{π}의 대소는 어떻게 결정되는가?

$p = \mathrm{e}$, $q = \pi$로 두면 $\mathrm{e} \leq p < q$를 만족한다. 이 현은 $c > 0$이므로 소문항 (ii)를 적용할 수 있고, $p^q > q^p$를 얻는다.

$$\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}.$$

소문항 (iv)

이번에는 $(p, \ln p)$와 $(q, \ln q)$를 지나는 현의 기울기가 $\frac{1}{\mathrm{e}}$이므로, 현은 $y = \frac{x}{\mathrm{e}} + c$이고

$$c = \ln p - \frac{p}{\mathrm{e}}.$$

직선 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$는 소문항 (i)에서 구한 $x = \mathrm{e}$에서의 접선이고, 위로 볼록한 곡선은 이 접선 위에 있거나 아래에 있다. 즉 $\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$이고, 등호는 $x = \mathrm{e}$일 때만 성립한다. 따라서 $c \leq 0$이고, $c = 0$인 것은 $p = \mathrm{e}$일 때뿐이다. 그런데 $c = 0$이면 현이 접선 자체가 되는데, 접선은 곡선과

e에서만 만나므로 두 점 $p < q$에서 만날 수 없다. 그러므로

$$c < 0.$$

현은 접선과 평행하고 접선 아래에 있다. 이제 부호를 바꾸어 소문항 (ii)의 논증을 반복한다.

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{q}.$$

$c < 0$이고 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$이므로 $\frac{c}{p} < \frac{c}{q}$이고, 따라서 $\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$이다. 양변에 $pq > 0$을 곱하면 $q \ln p < p \ln q$이므로

$$q^p > p^q.$$

(소문항 (i)에서처럼 여기서도 볼록성에 의해 $p < \mathrm{e} < q$가 되지만, 논증에는 이 사실이 필요하지 않다.)

검산

- $\mathrm{e}^\pi \approx 23.14$이고 $\pi^\mathrm{e} \approx 22.46$이므로 소문항 (iii)과 일치한다.
- 소문항 (i): $a = 2, b = 4$는 $2^4 = 4^2$을 만족하고, 실제로 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$이며 $2 < \mathrm{e} < 4$이다.
- 소문항 (iv): $p = 1$일 때 현의 기울기 $\frac{\ln q}{q-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$에서 $q \approx 5.76$을 얻는다. 그러면 $q^p \approx 5.76 > 1 = p^q$이다.
- 소문항 (ii)와 (iii)은 무작위로 고른 많은 현에 대한 컴퓨터 검사로도 확인했다.

흔한 실수

- $q \ln p > p \ln q$의 방향을 거꾸로 쓰는 것. pq를 곱하기 전에 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$를 명시적으로 적어 두자.
- 소문항 (iii)에서 "곡선이 위로 볼록하다"에서 멈추고 절편이 왜 양수인지 설명하지 않는 것. p에서의 접선은 축과 $\ln p - 1 \geq 0$에서 만나고, 현은 그보다 위에서 축을 지난다.
- 소문항 (iv)에서 $c = 0$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것. 이는 엄격한 부등식을 얻기 위해 필요하다.

STEP 너머

함수 $\frac{\ln x}{x}$는 e에서 최댓값을 가지며, 이것이 유명한 쌍 $2^4 = 4^2$을 설명해 준다. $x \neq y$인 $x^y = y^x$의 양의 해들은 하나의 곡선을 이루는데, 이 곡선은 $x = t^{1/(t-1)}, y = t^{t/(t-1)}$로

매개변수화할 수 있다. 더 일반적으로, "위로 볼록한 함수의 현은 곡선 아래에, 그리고 접선들 위에 있다"는 것은 볼록성(convexity)의 기본 부등식이다. 이는 옌센 부등식(Jensen's inequality)과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)의 바탕이 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 평균값 정리와 볼록함수를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.