풀이

STEP I 2013, 문제 9

역학 • 포물체와 충돌

STEP I 2013, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

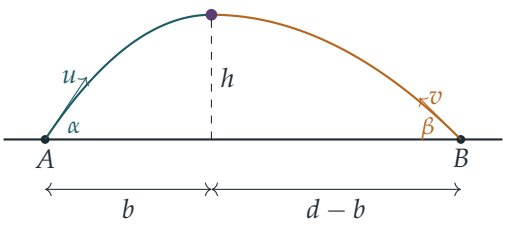
step.maths.org/questions/13-s1-q9

핵심 아이디어

포물체(projectile)가 최고점에 있을 때는 수직 속도가 0이다. 따라서 그 지점에서 충돌한 뒤 다시 떨어지는 데 걸리는 시간은 올라가는 데 걸린 시간과 같다. 그러므로 각 입자가 출발점으로 되돌아오려면 같은 시간 안에 수평 이동을 거꾸로 되짚어야 하고, 이는 수평 속도가 단순히 반대 방향으로 바뀌어야 함을 뜻한다. 이를 운동량 보존(conservation of momentum)에 대입하고, 두 입자가 같은 순간에 최고점에 도달한다는 사실을 이용하면 나머지는 모두 따라 나온다.

풀이

A와 B를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자로 모형화하고, 충돌에서의 충격량(impulse)은 중심선(line of centres)을 따라 작용한다고 하자. 충돌이 정면충돌(direct collision)이고 그 순간 두 입자 모두 수평으로 움직이고 있으므로, 이 충격량은 수평 방향이다. x축을 평면을 따라 A의 출발점에서 B의 출발점 쪽으로 잡으면, B는 $x = d$에서 출발한다.



최고점에서의 만남

A의 수직 속도는 $u\sin\alpha - gt$이므로, 시각 $t = u\sin\alpha/g$에 최고 높이에 도달한다. 마찬가지로 B는 $t = v\sin\beta/g$에 가장 높다. 두 입자는 동시에 발사되었고 각각 최고점에 있을 때 충돌하므로, 이 두 시각은 같다:

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad \text{따라서} \qquad u\sin\alpha = v\sin\beta. \tag{1}$$

충돌 직전 A의 속도는 $u\cos\alpha$로 양의 x 방향이고, B의 속도는 $v\cos\beta$로 음의 x 방향이다. 둘 다 수직 속도는 없다.

충돌 이후

> **생각해 보기** 반발 계수(coefficient of restitution)에 대해 아무것도 모르는데, 어떻게 충돌 후의 속도에 대해 무언가를 말할 수 있을까?

되돌아온다는 조건이 핵심 역할을 한다. 충격량이 수평이므로, 충돌 직후에도 A의 수직 속도는 여전히 0이며 평면 위 높이 h에 있다. 정지 상태에서 (수직으로) h만큼 떨어지는 데 걸리는 시간은 h만큼 올라가는 데 걸린 시간, 곧 T와 정확히 같다. 그 시간 동안 A는 수평으로 $x = b$에서 $x = 0$으로 되돌아와야 하는데, 여기서 $b = u\cos\alpha\, T$는 올라가는 동안 이동한 거리이다. 따라서 새로운 수평 속도는

$$-\frac{b}{T} = -u\cos\alpha :$$

A의 수평 속도는 정확히 반대가 되며, 같은 방식으로 B의 수평 속도도 그렇다. (사실 각 입자는 자신의 경로를 거꾸로 되짚어 간다.)

이제 x 방향의 운동량 보존으로부터

$$mu\cos\alpha - Mv\cos\beta = -mu\cos\alpha + Mv\cos\beta, \qquad \text{따라서} \qquad mu\cos\alpha = Mv\cos\beta. \tag{2}$$

다시 말해, 전체 운동량은 충돌 전과 후 모두 0이다. (2)를 (1)로 나누면(이는 α와 β가 0과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 엄밀하게 놓여 있어 (1)의 양변이 0이 아니므로 허용된다)

$$m\cot\alpha = M\cot\beta,$$

을 얻고, 이것이 증명하려던 식이다.

충돌이 일어나는 위치

시간 T 동안 A는 수평 거리 $b = u\cos\alpha\, T$를 이동하고 B는 $v\cos\beta\, T$를 이동한다. 둘이 합쳐 두 입자 사이의 간격을 메우므로

$$u\cos\alpha\, T + v\cos\beta\, T = d.$$

(2)에 의해 $v\cos\beta = \dfrac{m}{M}u\cos\alpha$이므로

$$b\left(1+\frac{m}{M}\right) = d \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{Md}{m+M},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (B가 무거울수록 수평으로 더 느리게 움직이고, 만나는 지점은 A의 출발점에서 더 멀어진다.)

충돌 높이

A의 수직 방향 운동에 $v^2 = u^2 + 2as$를 적용하면 최고 높이는

$$h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad \text{한편} \qquad b = u\cos\alpha\cdot\frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

두 식을 나누면

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad h = \tfrac{1}{2}b\tan\alpha.$$

검산

- 대칭성: $m = M$이면 $\alpha = \beta$이고 $b = \frac{1}{2}d$이므로, 두 입자는 당연히 한가운데에서 만난다.
- 높이 공식은 A의 출발점에서 경로의 최고점까지 잇는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}\tan\alpha$, 곧 발사 기울기의 절반임을 말해 준다. 이는 포물선(parabola)의 출발점에서의 접선(tangent)이 꼭짓점 높이의 두 배인 곳에서 대칭축과 만난다는 잘 알려진 사실이다. B에 대해 같은 계산을 하면 $h = \frac{1}{2}(d-b)\tan\beta$를 얻는데, 이것이 $\frac{1}{2}b\tan\alpha$와 일치하는 것은 바로 $m\cot\alpha = M\cot\beta$이기 때문이다.
- 수치로 확인해 보자. $m = 1$, $M = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두면 $\cot\beta = \frac{1}{2}$, $v = \sqrt{50}/\sin\beta \approx 7.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $d \approx 7.65\,\mathrm{m}$이고, 따라서 $b = \frac{2}{3}d \approx 5.10\,\mathrm{m}$, $h = \frac{1}{2}b \approx 2.55\,\mathrm{m}$이다. 충돌 순간에 수평 속도를 반대로 바꾸면서 두 운동을 컴퓨터로 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면, 두 입자가 이 지점에서 각자의 최고점에 있을 때 만나고 둘 다 출발점으로 되돌아와 착지함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 반발 계수를 사용하려는 것: 반발 계수는 주어지지 않았고 필요하지도 않다. 되돌아온다는 조건이 충돌 후의 속도를 결정하기 때문이다.
- 두 입자가 같은 시각에 최고점에 도달해야 한다는 사실을 잊는 것: 이 사실에서 (1)이 나오며, 이것 없이는 코탄젠트를 만들어 낼 수 없다.
- 운동량 방정식에서의 부호 오류: 충돌 전 B는 음의 방향으로 움직이고 있다.

STEP 너머

되돌아온다는 조건은 결국 시간 역전(time reversal)에 해당한다. 중력 아래에서의 뉴턴(Newton) 운동 방정식은 시계를 거꾸로 돌려도 같은 모양이므로, 입자의 속도를 반대로 바꾸면 입자는 자신의 경로를 따라 되돌아간다. 여기서는 전체 운동량이 0이므로 질량중심계(centre-of-mass frame)에서 계산하고 있는 셈이며, 이 기준계에서 탄성 충돌(elastic collision)은 두 속도를 그대로 반대로 바꿀 뿐이다. 바로 여기서 일어나는 일이 그것이다(따라서 이 충돌은 완전 탄성 충돌이다). 질량중심계와 보존 법칙은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 아름답게 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.