풀이

STEP I 2013, 문제 8

순수수학 • 합성함수

> **STEP I 2013, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q8

핵심 아이디어

합성함수(composite) pq는 "먼저 q를 적용하고, 그다음 p를 적용한다"는 뜻이며, q의 출력값이 p의 정의역(domain) 안에 들어가는 곳에서만 정의된다. 따라서 정의역은 q에서 오고(필요하면 일부를 잘라 낸다), 치역(range)은 p가 실제로 어떤 값들을 입력받는지 물어서 구한다. 계산 자체는 가볍다. 점수는 $\sqrt{x^2} = |x|$와 정의역을 얼마나 신중하게 다루느냐에 달려 있다. 소문항 (iii)에서는 항등식(identity) $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$이 대부분의 일을 해 준다.

풀이

소문항 (i)

- $\mathrm{cb}(x) = \mathrm{c}(\ln x) = 2\ln x$이다. 정의역은 b의 정의역, 즉 $x > 0$이고, c는 모든 실수를 입력으로 받는다. $\ln x$가 모든 실숫값을 가지므로 $2\ln x$도 그렇다. 따라서 치역은 $\mathbb{R}$이다.
- $\mathrm{ab}(x) = (\ln x)^2$이고, 정의역은 $x > 0$이다. $\ln x$가 모든 실숫값을 가지므로 그 제곱은 $[0, \infty)$의 모든 값을 가진다($x = 1$에서 0). 따라서 치역은 $y \geq 0$이다.
- $\mathrm{da}(x) = \sqrt{x^2} = |x|$이며, x가 아니다. 근호는 음이 아닌 제곱근을 뜻하기 때문이다. 여기서 항상 $x^2 \geq 0$이므로 정의역은 $\mathbb{R}$ 전체이고, 치역은 $y \geq 0$이다.
- $\mathrm{ad}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$이지만, d가 먼저 작용해야 하므로 $x \geq 0$일 때만 성립한다. 따라서 정의역은 $x \geq 0$이고 치역은 $y \geq 0$이다.

da와 ad는 치역은 같지만 정의역과 식이 다르다는 점에 주목하자. 즉 둘은 서로 다른 함수이다.

소문항 (ii)

fg의 경우: 모든 실수 x에 대해 $g(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1$이므로, $g(x)$는 항상 f의 정의역 안에 있다. 그러면

$$fg(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{정의역}\mathbb{R}, \quad \text{치역}y \geq 0.$$

gf의 경우: f가 먼저 작용하므로 $|x| \geq 1$이어야 하고, g는 어떤 입력이든 받는다. 그러면

$$gf(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x|, \qquad \text{정의역}|x| \geq 1, \quad \text{치역}y \geq 1.$$

이번에도 두 식은 일치하지만 함수는 다르다. gf의 정의역은 $-1 < x < 1$을 제외하므로, 치역은 1에서 시작한다.

소문항 (iii)

기본이 되는 사실은

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = x^2 - (x^2-1) = 1,$$

이므로 $x \geq 1$에서 $h(x)\,k(x) = 1$이라는 것이다.

h의 그래프 ($x \geq 1$).

- $h(1) = 1$이다.
- $x > 1$에서 $h'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$이므로 h는 증가한다(increasing). 또 $x \to 1^+$일 때 $h'(x) \to \infty$이므로, 곡선은 수직 접선(vertical tangent)을 가지며 $(1,1)$에서 출발한다.
- $x \to \infty$일 때 $h(x) \to \infty$이다. 점근선(asymptote)을 구하면

  $$h(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0^-,$$

  이므로 $y = 2x$가 점근선이고, 곡선은 아래쪽에서 이에 다가간다.

따라서 h는 1에서부터 연속적으로 한없이 증가한다. 그 치역은 $[1, \infty)$이다.

k의 그래프, $x \geq 1$인 가지.

- $k(1) = 1$이고, 기본 사실에 의해 $k(x) = 1/h(x)$이다.
- h는 양수이고 무한대로 증가하므로, k는 양수이고 감소하며(decreasing) $k(x) \to 0^+$이다. 따라서 $y = 0$이 점근선이고, 곡선은 위쪽에서 이에 다가간다.

- $x \to 1^+$일 때 $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to -\infty$이다. 즉 $(1,1)$에서 다시 수직 접선을 가지며, 이 점에서 이 가지가 h의 그래프와 만난다.

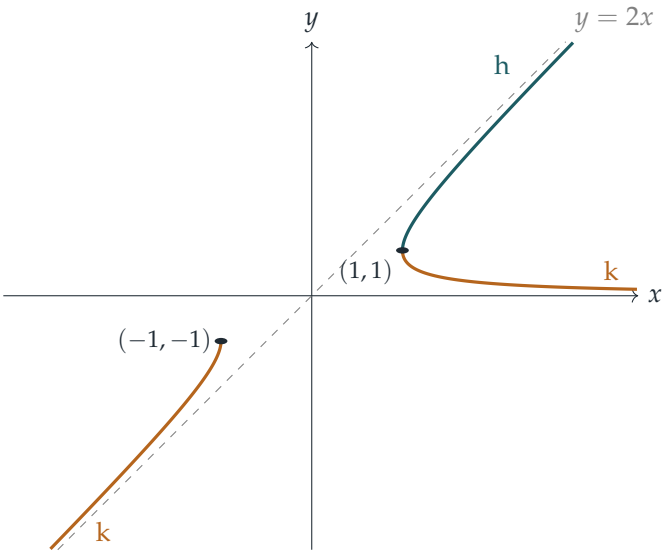
k의 그래프, $x \le -1$인 가지.

- $\mathrm{k}(-1) = -1$이다.
- $x < -1$이면 $x < 0$이므로 $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1 > 0$이다. 따라서 k는 증가한다. $x \to -1^-$일 때 $\mathrm{k}'(x) \to +\infty$이므로 $(-1,-1)$에서 수직 접선을 가진다.
- x와 $-\sqrt{x^2-1}$이 모두 음수이므로, $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{k}(x) \to -\infty$이다. $u \ge 1$로 두고 $x = -u$라 쓰면

$$\mathrm{k}(x) - 2x = u - \sqrt{u^2-1} = \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \to 0^+,$$

  이므로 $y = 2x$는 이 가지의 점근선이기도 하며, 곡선은 위쪽에서 이에 다가간다.

이 가지는 $(-\infty, -1]$의 모든 값을 가진다.



(이 모든 것을 한눈에 보는 깔끔한 방법이 있다. $t \ge 0$에 대해 $x = \cosh t$로 놓자. 그러면 $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$이므로 $\mathrm{h}(x) = e^t$, $\mathrm{k}(x) = e^{-t}$이다. 또 $x = -\cosh t$이면 $\mathrm{k}(x) = -e^t$이다.)

합성함수 kh. h의 정의역은 $x \ge 1$이고, 모든 값 $\mathrm{h}(x)$는 $\mathrm{h}(x) \ge 1$을 만족하므로 k의 정의역 안에 있다. 따라서 kh는 $x \ge 1$ 전체에서 정의된다.

생각해 보기 kh는 실제로 k의 그래프 중 어느 부분을 사용하는가?

h는 1보다 작은 값을 결코 출력하지 않으므로, $x \geq 1$인 가지만 사용한다. 더욱이 h는 $[1,\infty)$의 **모든** 값을 가지므로, kh는 $[1,\infty)$에서 k가 갖는 값들을 정확히 가진다. 이 가지에서 k는 $\mathrm{k}(1) = 1$에서 0을 향해 연속적으로 감소하며, 0에는 결코 도달하지 않는다($\mathrm{k} = 1/\mathrm{h} > 0$이므로). 따라서

$$\mathrm{kh}: \quad \text{정의역} x \geq 1, \qquad \text{치역} 0 < y \leq 1.$$

쌍곡선함수(hyperbolic function)를 이용한 관점에서는 $\mathrm{kh}(\cosh t) = \mathrm{k}(e^t)$이며, 이는 $t = 0$일 때 1에서 시작하는 t의 감소함수이다.

검산

- 특정값 대입: $\mathrm{h}(2) = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$이고 $\mathrm{k}(2) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$이며, 두 값의 곱은 1이다. 또 $\mathrm{k}(-2) = -2 - \sqrt{3} \approx -3.732$로, 점근선 분석이 예측한 대로 $2x = -4$보다 조금 위에 있다.
- $\mathrm{kh}(1) = \mathrm{k}(1) = 1$이고, $\mathrm{kh}(2) = \mathrm{k}(3.732\ldots) = 3.732 - \sqrt{3.732^2 - 1} \approx 0.136$으로 $(0,1]$ 안에 있다.
- $x = 1000$에서 $\mathrm{h}(x) - 2x \approx -0.0005$, $\mathrm{k}(x) \approx 0.0005$로, 각각 $-1/(2x)$와 $1/(2x)$에 들어맞는다.

흔한 실수

- $\sqrt{x^2} = x$라고 쓰는 것. 이것은 $|x|$이며, 바로 이 때문에 da, fg, gf는 항등함수가 아니다.
- 최종 식 $|x|$가 어디서나 의미가 있다는 이유로 gf의 정의역을 $\mathbb{R}$이라고 하는 것. 합성함수의 정의역은 처음 적용되는 함수가 결정한다.
- $x \leq -1$에서 k의 두 번째 가지나 그 점근선 $y = 2x$를 놓치는 것.

STEP 너머

대학에서 함수는 정의역, 공역(codomain), 그리고 대응 규칙의 세 가지로 이루어진 것이다. 여기서의 fg와 gf처럼 규칙은 같지만 정의역이 다른 두 함수는 진정으로 서로 다른 함수이며, 이러한 엄밀함은 역함수(inverse), 단사(injectivity), 전사(surjectivity)를 논의하자마자 중요해진다. 함수 h는 $e^{\operatorname{arcosh} x}$이며, $\ln \mathrm{h}(x)$는 $\operatorname{arcosh} x$의 표준 공식이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 함수, 연속성(continuity), 단조성(monotonicity)을

이와 같은 세심함으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.