풀이

STEP I 2013, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP I 2013, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q7

핵심 아이디어

(i)과 (ii)에서는 우변이 비 y/x에만 의존하므로, $y = ux$로 두면 방정식이 변수분리(separation of variables)가 되는 꼴로 바뀐다. (iii)은 이 패턴에서 벗어나는데, x^2/y는 y/x만의 함수가 아니기 때문이다. 해결책은 해가 x의 몇 제곱처럼 행동"해야" 하는지를 묻는 것이다. 두 항의 크기를 맞추어 보면 $y = u\,x^{3/2}$라는 치환(substitution)이 떠오르고, 그러면 다시 모든 것이 분리된다.

풀이

소문항 (i)

$y = ux$로 두면 곱의 법칙(product rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$이다. $x/y = 1/u$이고 $y/x = u$이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}.$$

u항이 소거되는데, 바로 이 덕분에 치환이 통한다. 변수를 분리하면($x > 0$이므로 x로 나눌 수 있다)

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

이고, $x > 0$이므로 $\ln|x|$ 대신 $\ln x$를 쓴다. $x = 1$일 때 $y = 2$이므로 $u = y/x = 2$이고, $2 = 0 + C$를 얻는다. 따라서

$$u^2 = 4 + 2\ln x.$$

이제 $y > 0$이고 $x > 0$이므로 $u > 0$이어야 한다. 따라서 양의 제곱근 $u = \sqrt{4 + 2\ln x}$를 택하면

$$y = x\sqrt{4 + 2\ln x}.$$

이를 위해서는 $4 + 2\ln x > 0$이어야 하고($y \geq 0$이 아니라 $y > 0$이 필요하다), 이는 $\ln x > -2$, 즉 $x > \mathrm{e}^{-2}$이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

우변이 다시 y/x의 함수이므로 같은 치환 $y = ux$를 쓴다.

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + 2u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u = \frac{1+u^2}{u}.$$

이번에는 u항이 소거되지 않지만, 변수는 여전히 분리된다.

$$\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x + C,$$

여기서 좌변의 적분은 $\frac{1}{2}\int f'/f$ 꼴이고, $1 + u^2 > 0$이므로 절댓값이 필요 없다. $x = 1$에서 $u = 2$이므로 $C = \frac{1}{2}\ln 5$이다. 양변에 2를 곱하고 지수를 취하면

$$1 + u^2 = 5x^2, \qquad \text{따라서} \qquad u = \sqrt{5x^2 - 1}$$

이다($u > 0$이므로 양의 제곱근). 그러므로

$$y = x\sqrt{5x^2 - 1} \qquad (x > \tfrac{1}{\sqrt{5}}),$$

이고, 이 제한은 $x > 0$에서 $5x^2 - 1 > 0$이어야 한다는 데서 나온다.

소문항 (iii)

이번에는 $y = ux$로 두면 $x^2/y = x/u$가 되어 여전히 x가 단독으로 남으므로, 방정식이 분리되지 않는다. 우변의 두 항이 같은 방식으로 스케일링되도록 하는 치환이 필요하다.

> **생각해 보기** y가 거듭제곱 x^k처럼 행동한다면, k가 어떤 값일 때 $\dfrac{x^2}{y}$와 $\dfrac{2y}{x}$의 크기가 같아지는가?

x^{2-k}와 x^{k-1}이 일치해야 하므로 $2 - k = k - 1$이고, $k = \frac{3}{2}$를 얻는다. (그러면 좌변 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$도 $x^{1/2}$처럼 행동하므로 세 항이 모두 일치한다.) 이로부터 치환 $y = u\,x^{3/2}$를 생각할 수 있고, 이때

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \tfrac{3}{2}u\,x^{1/2}, \qquad \frac{x^2}{y} = \frac{x^{1/2}}{u}, \qquad \frac{2y}{x} = 2u\,x^{1/2}.$$

방정식 전체를 (양수인) $x^{1/2}$로 나누면

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \tfrac{3}{2}u = \frac{1}{u} + 2u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + \frac{u}{2} = \frac{2+u^2}{2u}.$$

변수를 분리하면

$$\int \frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln(2+u^2) = \ln x + C.$$

$x = 1$에서 $u = y/x^{3/2} = 2$이므로 $C = \ln 6$이고, 따라서 $2 + u^2 = 6x$이다. 양의 제곱근을 택하면 $u = \sqrt{6x-2}$이므로

$$y = x^{3/2}\sqrt{6x-2} = \sqrt{6x^4 - 2x^3} \qquad (x > \tfrac{1}{3}),$$

이고, $6x - 2 > 0$이려면 $x > \frac{1}{3}$이어야 한다.

(iii)의 다른 풀이. 방정식에 $2y$를 곱하고 $z = y^2$로 두면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{4}{x}z = 2x^2,$$

을 얻는데, 이는 적분인자(integrating factor)가 x^{-4}인 선형(linear) 방정식이다. 그러면 $(x^{-4}z)' = 2x^{-2}$이므로, $z(1) = 4$를 이용하면 $x^{-4}z = -2/x + 6$이고, 앞에서와 같이 $y^2 = 6x^4 - 2x^3$을 얻는다. 같은 방법($z = y^2$)으로 (i)과 (ii)도 풀 수 있다.

검산

- 각 답은 $x = 1$에서 $y = 2$를 준다: $1 \cdot \sqrt{4}$, $1 \cdot \sqrt{4}$, $\sqrt{6-2}$.
- (ii)의 답을 미분하여 다시 대입해 보자. $y^2 = 5x^4 - x^2$에서 $2yy' = 20x^3 - 2x$이므로 $y' = (10x^3 - x)/y$이다. 한편 $\dfrac{x}{y} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy} = \dfrac{10x^4 - x^2}{xy}$이고, 이는 같은 값이다.
- $x = 2$에서 세 해는 $2\sqrt{4 + 2\ln 2} \approx 4.642$, $2\sqrt{19} \approx 8.718$, $4\sqrt{5} \approx 8.944$를 준다. 예상대로 (ii)에서 y/x의 계수가 더 크기 때문에 y가 (i)에서보다 빠르게 증가한다.

흔한 실수

- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$에서 u를 빠뜨려, u에 대한 방정식이 틀리게 나오는 경우.
- 초기 조건(initial condition)을 u 대신 y에 적용하는 경우: 여기서는 $x = 1$에서 둘이 일치하지만, (iii)에서는 일반적으로 $u = y/x^{3/2}$가 필요하다.
- 정의역(domain)을 빠뜨리는 경우. 제곱근은 실수이고 양수여야 하므로 $x > \mathrm{e}^{-2}$, $x > 1/\sqrt{5}$, $x > \frac{1}{3}$을 얻는다.

STEP 너머

우변이 y/x에만 의존하는 방정식을 **동차**(homogeneous) 방정식이라 하며, 치환 $y = ux$는 언제나 이를 변수분리형으로 만든다. (iii)은 모습을 바꾼 스케일링 대칭(scaling symmetry)이다. 방정식은 $x \mapsto \lambda x, y \mapsto \lambda^{3/2} y$에 대해 변하지 않으며, 이러한 스케일링 대칭은 언제나 방정식을 변수분리형으로 만드는 치환을 알려 준다. $z = y^{1-n}$으로 두면 선형이 되는 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 꼴의 방정식을 베르누이 방정식(Bernoulli equations)이라 하며, 여기의 세 소문항은 모두 $n = -1$인 이 유형에 속한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계(first-order) 방정식을 다루는 장에서 이 두 부류를 모두 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.