풀이

STEP I 2013, 문제 6

순수수학 • 이항계수와 피보나치 수열

STEP I 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q6

핵심 아이디어

파스칼(Pascal)의 법칙(Pascal's rule)이 전체를 움직이는 원동력이다. 각 B_n은 이항계수(binomial coefficient)들의 합이며, B_{n+2}의 모든 항을 파스칼의 법칙으로 쪼개면 그 조각들이 정확히 B_{n+1}과 B_n의 항들로 다시 묶인다. 유일하게 주의할 곳은 합의 양 끝으로, 여기서는 파스칼의 법칙을 쓸 수 없으므로 홀로 남은 1을 손으로 짝지어 주어야 한다. B_n은 n이 짝수일 때와 홀수일 때 다르게 정의되므로, 두 경우를 따로 다룬다.

풀이

파스칼의 법칙

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$이므로 양변에서 x^r의 계수는 같다. 좌변에서 그 계수는 $\binom{n+1}{r}$이다. 우변에서는

$$(1+x)\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{s+1},$$

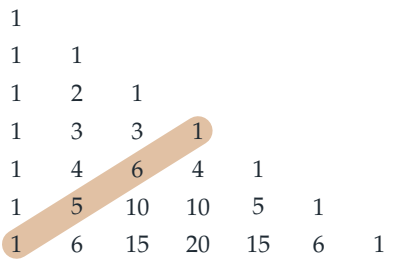
이고, $1 \le r \le n$일 때 첫 번째 합에서는 ($s = r$인 항에서) $\binom{n}{r}$이, 두 번째 합에서는 ($s = r-1$인 항에서) $\binom{n}{r-1}$이 나온다. 따라서

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (1 \le r \le n).$$

점화식

B_n이 무엇인지 보는 것이 도움이 된다. B_n은 파스칼의 삼각형의 "완만한 대각선" $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$를 더한 것으로, 위의 수가 아래의 수 이상인 마지막 항에서 멈춘다. 삼

각형을 왼쪽으로 정렬하면 $B_6 = 1+5+6+1 = 13$을 이루는 항들이 한 직선 위에 놓인다.



(호박색 띠가 $\binom{6}{0}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}$을 골라 보여 준다.)

짝수인 경우, $n = 2m$ $(m \geq 0)$. $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$임을 보여야 한다. 정의에 의하여

$$B_{2m+2} = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j}.$$

양 끝 항은 $\binom{2m+2}{0} = 1$을 주는 $j = 0$과 $\binom{m+1}{m+1} = 1$을 주는 $j = m+1$이다. $1 \leq j \leq m$에 대해서는 위의 수가 $2m+1-j$, 아래의 수가 j인 파스칼의 법칙을 쓴다. $j \leq m$이면 $j \leq 2m+1-j$이므로 이렇게 해도 된다. 그러므로

$$B_{2m+2} = \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j-1} + 1}_{\text{(b)}}.$$

(a)에서 1은 빠져 있던 $k = 0$인 항 $\binom{2m+1}{0}$이므로, (a)는 $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = B_{2m+1}$이다.

? **생각해 보기** 두 번째 합은 무엇이 되어야 하며, 남는 1은 어디로 가는가?

(b)에서 $i = j-1$로 놓으면 합은 $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i}$가 되는데, 이것은 마지막 항 $i = m$이 빠진 B_{2m}이다. 그 마지막 항은 $\binom{m}{m} = 1$로, 바로 남는 1이다. 따라서 (b) $= B_{2m}$이고 $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$이다. ($m = 0$일 때는 합들이 비어 있으며 이 식은 $2 = 1+1$이 된다.)

홀수인 경우, $n = 2m+1$ $(m \geq 0)$. $B_{2m+3} = B_{2m+2} + B_{2m+1}$임을 보여야 한다. 이제

$$B_{2m+3} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2m+3-k}{k}.$$

$k = 0$인 항 $1 = \binom{2m+2}{0}$만 그대로 둔다. $1 \leq k \leq m+1$에 대해서는 $k \leq m+1$이면 $k \leq 2m+2-k$이므로, 위의 수가 $2m+2-k$, 아래의 수가 k인 파스칼의 법칙을 쓸 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned} B_{2m+3} &= \binom{2m+2}{0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j} + \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1-i}{i} \qquad (i = k-1) \\ &= B_{2m+2} + B_{2m+1}. \end{aligned}$$

이번에는 남는 끝 항이 없다.

모든 $n \geq 0$은 $2m$ 또는 $2m+1$ 꼴이므로, 요구한 대로 모든 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 $B_{n+2} - B_{n+1} = B_n$이다.

피보나치 수와의 관계

직접 계산하면 $B_0 = \binom{0}{0} = 1$, $B_1 = \binom{1}{0} = 1$이다. 피보나치(Fibonacci) 수(Fibonacci numbers)는 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$로 시작한다. 따라서 $B_0 = F_1$, $B_1 = F_2$이고, 두 수열은 "각 항은 앞의 두 항의 합이다"라는 같은 점화식을 따른다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 ($B_n = F_{n+1}$이고 $B_{n+1} = F_{n+2}$이면 $B_{n+2} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$이므로)

$$B_n = F_{n+1} \qquad \text{모든} n \geq 0.$$

B 수열은 피보나치 수열을 한 자리 민 것으로, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$이다.

검산

- 정의로부터 몇 항을 바로 계산해 보자. $B_2 = 1 + 1 = 2$, $B_3 = 1 + 2 = 3$, $B_4 = 1 + 3 + 1 = 5$, $B_5 = 1 + 4 + 3 = 8$이다. 이들은 $F_3, \ldots, F_6$이다.
- 더 큰 경우: $B_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55 = F_{10}$.
- 파스칼의 법칙 확인: $\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10 + 5 = 15 = \binom{6}{2}$.

흔한 실수

- $\binom{m+1}{m+1}$ 같은 끝 항에 파스칼의 법칙을 적용하는 것. 그러면 $\binom{m}{m+1}$이 나오는데, 이는 법칙을 증명한 범위 $1 \leq r \leq n$을 벗어난다. 끝 항을 먼저 떼어 내야 한다.
- 한쪽 홀짝성(parity)만 다루는 것. B_{2m}과 B_{2m+1}의 정의가 다르고, 점화식은 짝수 번째 항을 홀수 번째 항들과 연결하므로 두 경우가 모두 필요하다.
- 첨자의 이동을 잘못 처리하는 것. 답은 $B_n = F_n$이 아니라 $B_n = F_{n+1}$이다($B_0 = 1 \neq F_0$을 확인하라).

STEP 너머

항등식 $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$에는 깔끔한 세 기 증명이 있다. 양변 모두 $1 \times n$ 띠를 정사각형과 도미노로 덮는 방법의 수를 센다(k는 도미노의 개수이며, $n-k$개의 타일 가운데 도미노의 위치를 고르는 방법이 $\binom{n-k}{k}$가지이다). 같은 집합을 두 가지 방법으로 세어 항등식을 증명하는 것은 대학 조합론(combinatorics)의 핵심 기법이며, $\sum F_n x^n = x/(1-x-x^2)$이 되는 생성함수(generating function)의 관점도 마찬가지이다. 더 알고 싶다면 Wilf, *generatingfunctionology*(생성함수론), 또는 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.