풀이

STEP I 2013, 문제 5

순수수학 • 이차곡선과 회전

STEP I 2013, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q5

핵심 아이디어

k에 따라 달라지는 항은 xy항 하나뿐이며, 이 항이 어떤 종류의 곡선이 나오는지를 결정한다. xy항이 없으면 x와 y 각각에 대해 따로 완전제곱식 만들기(completing the square)를 할 수 있다. 이차 부분이 인수분해(factorise)되면 방정식 전체가 두 직선으로 인수분해될 수도 있다. 그리고 이차 부분이 완전제곱식(perfect square) $(x+y)^2$이면, 좌표축을 45° 회전(rotation)하여 $x+y$를 하나의 좌표로 바꿀 수 있고, 그러면 익숙한 포물선(parabola)이 남는다.

또한 $x=0$ 또는 $y=0$으로 놓으면 xy항이 사라지므로, 좌표축과 만나는 절편(intercept)은 모든 k에 대해 같다는 점에 주목하자. $x^2+3x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-3$이고, $y^2+y=0$에서 $y=0$ 또는 $y=-1$이다. 따라서 모든 궤적(locus)은 $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-1)$을 지난다.

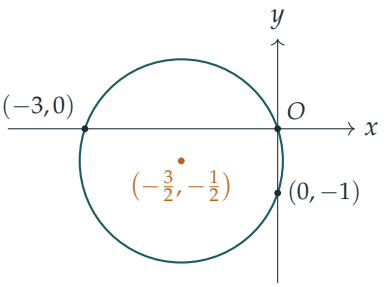
풀이

소문항 (i)

$k=0$일 때 각 변수에 대해 완전제곱식을 만들면

$$(x+\tfrac{3}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2}.$$

따라서 궤적은 중심이 $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$이고 반지름이 $\sqrt{5/2}\approx 1.58$인 원이다. 이 원은 x-축과 $(0,0)$, $(-3,0)$에서 만나고, y-축과 $(0,0)$, $(0,-1)$에서 만난다. (원점과 $(-3,0)$은 한 현(chord)의 양 끝점이므로, 중심은 그 수직이등분선(perpendicular bisector) $x=-\frac{3}{2}$ 위에 있어야 하고, 실제로 그렇다.)



소문항 (ii)

$k = \frac{10}{3}$일 때 양변에 3을 곱하면

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy + 9x + 3y = 0.$$

이차 부분은

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = (3x + y)(x + 3y),$$

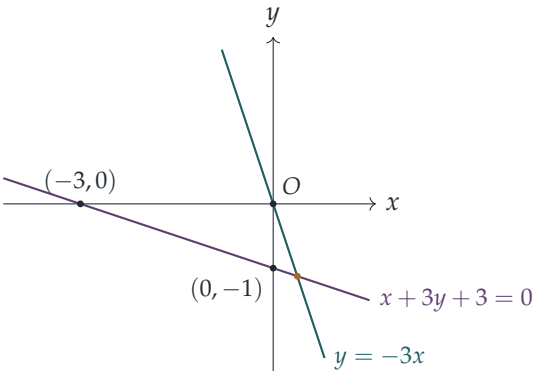
으로 인수분해되고, 일차 부분은 $9x + 3y = 3(3x + y)$이므로 공통인수 $3x + y$를 가진다. 따라서

$$(3x + y)(x + 3y) + 3(3x + y) = (3x + y)(x + 3y + 3) = 0.$$

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, 궤적은 두 직선

$$y = -3x \qquad \text{그리고} \qquad x + 3y + 3 = 0.$$

이다. 첫 번째 직선은 원점을 지난다(원점이 두 좌표축과 만나는 유일한 점이다). 두 번째 직선은 x-축과 $(-3, 0)$에서, y-축과 $(0, -1)$에서 만난다. 두 식을 연립하면 $x - 9x + 3 = 0$이므로, 두 직선은 $\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)$에서 만난다.



소문항 (iii)

$k = 2$일 때 방정식은

$$(x+y)^2 + 3x + y = 0.$$

이다. $\theta = 45°$이면 $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

따라서 $x + y = \sqrt{2}\,X$이고 $y - x = \sqrt{2}\,Y$이며, 두 식을 더하고 빼면

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

? **생각해 보기** 왜 그 반대가 아니라 x와 y를 X와 Y로 나타내야 할까?

우리는 P가 곡선 위에 있다는 것을 알고 있고, Q가 만족하는 방정식을 구하려 한다. 따라서 P의 궤적의 방정식에 x와 y를 대입해야 하며, 이를 위해서는 x와 y를 X와 Y로 나타내야 한다. (이 변환은 회전이므로 역변환(inverse)은 반대 방향으로의 회전일 뿐이어서 쉽게 구할 수 있다.)

일차 부분은

$$3x + y = \frac{3X - 3Y + X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y,$$

이 되고, $(x+y)^2 = 2X^2$이다. 따라서 Q의 궤적은

$$2X^2 + 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}\,Y = 2X^2 + 2\sqrt{2}\,X = \left(\sqrt{2}\,X + 1\right)^2 - 1,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. 모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 이것이 정확히 Q의 궤적이다.

이것은 (X, Y) 평면에서 Y가 증가하는 방향으로 열린 포물선이다. 이 포물선은 $\sqrt{2}\,X + 1 = 0$인 직선, 즉 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$에 대해 대칭이고, 꼭짓점(vertex)은 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$에 있다.
이제 회전을 되돌린다. Q는 P를 시계 방향으로 45° 회전하여 얻은 점이므로, P의 궤적은 이 포물선을 **반시계 방향**으로 45° 회전한 것이다. x와 y로 나타내면 다음과 같다.

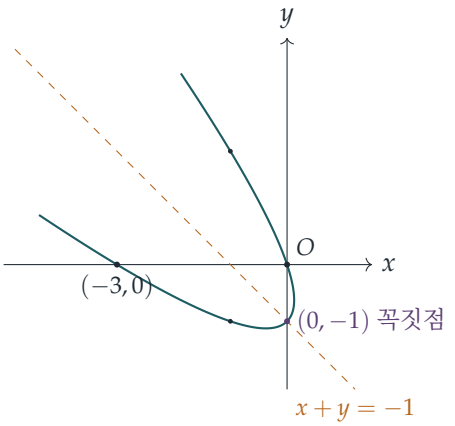
- 대칭축(line of symmetry) $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$는 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 다음 직선이다.

$$x + y = -1;$$

- 꼭짓점은 $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} = 0$, $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = -1$, 즉 $(0, -1)$에 있다.
- 포물선은 $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$가 증가하는 방향, 즉 $(-1, 1)$ 방향인 왼쪽 위로 열려 있다.

처음에 살펴본 것처럼 절편은 $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-1)$이며, $(0,-1)$이 꼭짓점이다. 꼭짓점에서의 접선(tangent)은 대칭축에 수직이므로 기울기(gradient)가 1이다. 따라서 곡선은 꼭짓점에서 y-축에 접하는 것이 아니라 y-축을 가로지른다. 대칭성을 검산해 보면, $x+y=-1$에 대한 대칭이동은 (a,b)를 $(-1-b,-1-a)$로 보내므로 원점은 $(-1,-1)$로, $(-3,0)$은 $(-1,2)$로 옮겨진다. 두 점 모두 $(x+y)^2+3x+y=0$을 만족한다.

그래프를 그릴 때는 $u=x+y$로 놓으면 편리하다. 그러면 $3x+y=-u^2$이고, 이를 풀면 $x=-\frac{1}{2}(u^2+u)$, $y=\frac{1}{2}(u^2+3u)$이다.



P의 궤적은 꼭짓점이 $(0,-1)$이고 대칭축이 $x+y=-1$인 포물선이다.

검산

- 절편 $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-1)$을 세 방정식에 모두 대입해 보면, k의 값에 관계없이 각각 0이 된다.
- (ii)에서 $(3x+y)(x+3y+3)$을 전개하고 3으로 나누면 $k=\frac{10}{3}$일 때의 원래 방정식이 나온다. 교점 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$은 $3x+y=0$과 $x+3y+3=0$을 모두 만족한다.
- (iii)에서 $u=1$로 놓으면 점 $(-1,2)$는 P의 궤적 위에 있다. 이때 $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$이고, $\sqrt{2}\,Y=3=(1+1)^2-1$이다.

흔한 실수

- (iii)에서 x,y를 X,Y로 나타내지 않고, X,Y에 대한 식을 방정식에 대입하는 것.
- 포물선을 잘못된 방향으로 되돌려 회전하여, 대칭축을 $x+y=-1$이 아니라 $y-x=-1$로 구하는 것.

- (ii)에서 일차항들이 공통인수 $3x + y$를 가진다는 것을 놓치고, 궤적을 다른 종류의 이차곡선으로 취급하는 것.

STEP 너머

모든 방정식 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$은 이차곡선(conic)이며, 그 종류는 이차 부분의 판별식(discriminant) $b^2 - 4ac$로 결정된다. 판별식이 음수이면 타원(ellipse)(여기서는 원, $k = 0$), 0이면 포물선($k = 2$), 양수이면 쌍곡선(hyperbola)이고, 쌍곡선은 두 직선으로 퇴화(degenerate)할 수 있다($k = \frac{10}{3}$). 대학 1학년 선형대수학(linear algebra) 강의에서는 이차형식(quadratic form)의 대칭행렬(symmetric matrix)의 고유벡터(eigenvector) 방향으로 좌표축을 회전하여 xy항을 체계적으로 없애는 방법을 배운다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에 이 내용이 명쾌하게 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.