풀이

STEP I 2013, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2013, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q4

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 각 피적분함수(integrand)는 "어떤 것의 함수에 그것의 도함수(derivative)를 곱한 꼴"이다. $\sec^2 x$는 $\tan x$의 도함수이고, $\sec x \tan x$는 $\sec x$의 도함수이다. 소문항 (ii)에서는 x 또는 x^2이라는 추가 인수가 있으므로 부분적분(integration by parts)을 써야 한다. 이때 적분하는 쪽은 삼각함수 인수이고, 그 방법은 소문항 (i)에서 방금 보았다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 적분에서는 $u = \tan x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$이다. $x = 0$일 때 $u = 0$이고, $x = \frac{1}{4}\pi$일 때 $u = 1$이다. 따라서

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^n x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

이다. 여기서 $0^{n+1} = 0$이 되도록 $n > 0$임을 이용했다.

> **생각해 보기** 두 번째 적분에서, $\sec^n x \tan x$ 안에는 어떤 함수의 도함수가 숨어 있는가?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$이므로 $\sec x$ 인수 하나를 떼어 낸다.

$$\sec^n x \tan x = \sec^{n-1} x \, (\sec x \tan x).$$

이제 $u = \sec x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$이고, $x = 0$에서 $u = 1$, $x = \frac{1}{4}\pi$에서

$u = \sqrt{2}$이다. $n > 0$이므로 n으로 나눌 수 있고,

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^n x \tan x \,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} u^{n-1} \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^n}{n}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{n},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

첫 번째 적분. 이를 I_1이라 하자. x를 미분하고 $\sec^4 x \tan x$를 적분하는 방식으로 부분적분한다. 소문항 (i)의 치환 $u = \sec x$를 쓰면 원시함수(antiderivative)

$$\int \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\sec^4 x + C.$$

를 얻는다. ($[0, \frac{1}{4}\pi]$에서의 정적분(definite integral)은 $\frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}$이며, 이는 소문항 (i)에서 $n = 4$인 경우이다.) 그러므로

$$I_1 = \left[\tfrac{1}{4}x\sec^4 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x,$$

이다. $\sec^4 \frac{1}{4}\pi = (\sqrt{2})^4 = 4$이기 때문이다. 남은 적분은 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$로 고쳐 쓰면

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^2 x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

이다. 여기서 첫 번째 적분은 $[\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1$이고, 두 번째 적분은 소문항 (i)에서 $n = 2$인 경우이다. 따라서

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

두 번째 적분. 이를 I_2라 하자. 이번에도 x의 거듭제곱을 미분하고 $\sec^2 x \tan x$를 적분한다. 원시함수 하나는 $\frac{1}{2}\sec^2 x$이지만, $\frac{1}{2}\tan^2 x$도 똑같이 쓸 수 있으며(둘은 상수 $\frac{1}{2}$만큼 차이 난다), 이쪽이 더 좋은 선택이다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\frac{1}{2}\sec^2 x$보다 $\frac{1}{2}\tan^2 x$를 택하는가?

부분적분을 하고 나면 $x\tan^2 x$가 남는데, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$은 적분할 수 있는 조각들로 나뉜다. 또한 $\tan^2 x$는 0에서 값이 0이 되므로 경계항(boundary term)이 깔끔해진다. ($\frac{1}{2}\sec^2 x$를 써도 결국 같은 답이 나온다.)

따라서 $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$을 이용하면

$$I_2 = \left[\tfrac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\tan^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\tan^2 x \,\mathrm{d}x.$$

이제

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{32}.$$

$\sec^2 x$의 원시함수로 $\tan x$를 택하여 한 번 더 부분적분하고, $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \ln\sec x$(이 구간에서 $\sec x > 0$이므로 성립한다)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln\sec x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

이 조각들을 모으면

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\right),$$

즉,

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x^2\sec^2 x\tan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

검산

- 소문항 (i)에서 $n = 1$일 때: 두 공식은 각각 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$와 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$을 주며, 이는 $\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]$와 $[\sec x]$로부터 직접 확인할 수 있다.
- 부호와 크기: 소문항 (ii)의 두 피적분함수는 모두 $(0, \frac{1}{4}\pi)$에서 양수이고, 답 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521$과 $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.1780$도 양수이다. 두 번째 값이 더 작은 것도 당연한데, 그 구간에서 $x^2\sec^2 x \le x\sec^4 x$이기 때문이다($x < 1 < \sec^2 x$이므로).
- 대략적인 상계: $x\sec^4 x\tan x \le \frac{\pi}{4}\sec^4 x\tan x$이므로 $I_1 \le \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{4} \approx 0.589$이다. 우리가 얻은 0.452는 이와 모순되지 않는다. 계산기로 구간을 몇 개만 나누어 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용해도 두 값에 가까운 결과가 나온다.

흔한 실수

- 소문항 (i)의 두 번째 적분에서 $\sec x\tan x$를 먼저 떼어 내지 않고 $u = \sec x$로 치환하여, 거듭제곱이 $n - 1$이 아니라 n으로 남는 실수.
- $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$, 따라서 $\sec^4\frac{1}{4}\pi = 4$이고 $\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$임을 잊는 실수.
- 경계항 $\left[\frac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]$를 빠뜨리거나, $\int \tan x\,\mathrm{d}x$의 부호를 틀리는 실수(이 값은 $\ln\sec x = -\ln\cos x$이다).

STEP 너머

소문항 (i)의 적분들은 $\sec^m x \tan^n x$를 적분하는 표준 이론의 첫 단계로, 이 이론에서는 점화 공식(reduction formulae)을 이용해 거듭제곱을 한 단계씩 낮춘다. 소문항 (ii)처럼 다항식 인수가 있는 부분적분은 "표 방법(tabular method)"으로 일반화되며, 훨씬 뒤에는 한 함수의 도함수를 다른 함수로 옮기는 아이디어로 이어지는데, 이것이 미분방정식(differential equations)의 약해(weak solutions)의 바탕이 된다. 치환적분과 부분적분이 왜 성립하는지에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라. 이런 유형의 문제를 더 많이 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에 도전해 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.