풀이

STEP I 2013, 문제 3

순수수학 • 벡터 대수

> **STEP I 2013, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q3

핵심 아이디어

여기서 다루는 것은 모두 선형(linear)이므로, 매번 가장 깔끔한 방법은 각 점을 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$의 결합으로 나타낸 다음 빼는 것이다. 두 점은 위치벡터(position vector)의 차가 영벡터가 아닐 때, 그리고 오직 그때에만 서로 다르며, 그 차는 언제나 간단한 인수와 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 같은 벡터의 곱으로 나타난다. 기하적으로 $X*Y$는 직선 XY 위의 점이고, $0<\lambda<1$일 때는 두 점 사이의 선분(segment) 위에 놓인다.

풀이

이 풀이 전체에서 두 점이 같다는 것은 두 점의 위치벡터가 같다는 것과 동치이다.

소문항 (i)

정의에 따라 $Y*X$의 위치벡터는 $\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}$이므로

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})-(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}) &= (2\lambda-1)\mathbf{x}-(2\lambda-1)\mathbf{y}\\ &= (2\lambda-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}$$

X와 Y는 서로 다른 점이므로 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$이고, 따라서 이 차가 영벡터일 필요충분조건은 $2\lambda-1=0$이다. 그러므로 $X*Y$와 $Y*X$는 서로 다른 점이며, 예외는 $\lambda=\frac{1}{2}$일 때뿐인데, 이때 두 점은 모두 XY의 중점(midpoint)이다.

소문항 (ii)

양변을 각각 전개하면

$$(X*Y)*Z: \quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})+(1-\lambda)\mathbf{z} = \lambda^2\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z},$$
$$X*(Y*Z): \quad \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)^2\mathbf{z}.$$

$\mathbf{y}$ 항은 서로 같고, 빼면

$$\begin{aligned} \text{차} &= (\lambda^2-\lambda)\mathbf{x}+((1-\lambda)-(1-\lambda)^2)\mathbf{z} \\ &= -\lambda(1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{z} \\ &= \lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x}). \end{aligned}$$

이것은 각 인수가 모두 0이 아닐 때, 그리고 오직 그때에만 영벡터가 아니다. 따라서 $(X*Y)*Z$와 $X*(Y*Z)$가 서로 다를 필요충분조건은

$$\lambda \neq 0, \qquad \lambda \neq 1 \qquad \text{그리고} \qquad Z \neq X.$$

Y는 아무 역할도 하지 않는다는 점에 주목하자. 제외되는 값들도 이치에 맞는다. $\lambda = 1$이면 이 연산은 항상 첫 번째 점을 내놓고, $\lambda = 0$이면 항상 두 번째 점을 내놓으므로, 두 가지 괄호 묶기 모두 각각 X 또는 Z를 준다.

소문항 (iii)

식을 깔끔하게 하기 위해 $\mu = 1-\lambda$로 놓자. 우변은

$$\begin{aligned} (X*Z)*(Y*Z): \quad & \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})+\mu(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z}) \\ &= \lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu(\lambda+\mu)\mathbf{z} \\ &= \lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z}, \end{aligned}$$

인데, 이는 $\lambda+\mu = 1$이기 때문이다. 이것은 소문항 (ii)에서 구한 $(X*Y)*Z$의 전개식과 정확히 같으므로, 모든 점 X, Y, Z에 대하여

$$(X*Y)*Z = (X*Z)*(Y*Z)$$

가 성립하고, 이것이 증명하려던 것이다.

생각해 보기 $X*(Y*Z)$에 대한 "대응하는 결과"는 어떤 모양이어야 할까?

소문항 (iii)에서는 바깥쪽의 $*Z$를 왼쪽 괄호에 분배(distribute)했다. 이를 거울에 비춘 모습은 $X*$를 오른쪽 괄호에 분배하는 것이므로, $(X*Y)*(X*Z)$를 시도해 볼 만하다. 실제

로

$$\begin{aligned}(X*Y)*(X*Z): \quad & \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\mu(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z}) \\ &= \lambda(\lambda+\mu)\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z} \\ &= \lambda\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z},\end{aligned}$$

이고, 이것은 소문항 (ii)에서 구한 $X*(Y*Z)$의 전개식이다. 따라서 임의의 점 X, Y, Z에 대하여

$$X*(Y*Z)=(X*Y)*(X*Z).$$

소문항 (iv)

P_n의 위치벡터가

$$\mathbf{p}_n=\lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y}.$$

임을 보이자. $n=1$일 때 이것은 $X*Y$의 정의 그 자체이다. $n-1$일 때 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n=\lambda\mathbf{p}_{n-1}+(1-\lambda)\mathbf{y} &= \lambda^n\mathbf{x}+(\lambda-\lambda^n+1-\lambda)\mathbf{y} \\ &= \lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y},\end{aligned}$$

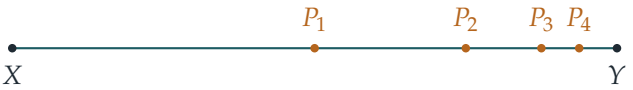
이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 이 식은 모든 $n\geq 1$에 대하여 성립한다.

이제 선분을 따라 거리를 재어 보자.

$$\mathbf{p}_n-\mathbf{x}=(1-\lambda^n)(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y}-\mathbf{p}_n=\lambda^n(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

$0<\lambda<1$이면 $0<\lambda^n<1$이므로, 두 벡터는 모두 같은 영이 아닌 벡터 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$의 양수배이다. 따라서 P_n은 X와 Y 사이에 (양 끝점을 제외하고) 놓이며

$$XP_n : P_nY = (1-\lambda^n) : \lambda^n.$$



$\lambda=\frac{1}{2}$: 한 단계마다 Y까지의 간격이 절반이 된다

한 단계마다 Y까지 남은 거리에 λ가 곱해지므로, 점들은 Y를 향해 나아가고, $n\to\infty$일 때 $P_n\to Y$이다.

검산

- 소문항 (i)에서 한 직선 위에 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{y}=\mathbf{1}$로 잡고 $\lambda=\frac{1}{3}$이라 하자. 그러면 $X*Y$는 $\frac{2}{3}$에, $Y*X$는 $\frac{1}{3}$에 있고, 둘의 차는 $\frac{1}{3}=|2\lambda-1|$이다.

- 소문항 (ii)에서 $Z = X$이면 어떤 λ에 대해서도 두 괄호 묶기의 결과가 같아야 한다. 실제로 이때 우리가 구한 차 $\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})$는 영벡터가 되므로 예상과 맞는다.
- 소문항 (iv)에서 $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = 3$이면 비는 $\frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7:1$이고, 실제로 P_3은 X에서 Y까지 가는 길의 $\frac{7}{8}$ 지점에 있다(간격을 세 번 절반으로 줄인 것). $n = 1$이면 비 $(1-\lambda) : \lambda$는 바로 $X * Y$의 정의이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $Z \neq X$를 빠뜨리는 것. 답은 λ에 대한 조건만이 아니다.
- 소문항 (iv)에서 비를 거꾸로 쓰는 것. $\mathbf{p}_n$은 $\mathbf{x}$에 가중치 λ^n을 두므로 λ^n이 클 때 X에 가깝고, 따라서 더 짧은 조각 XP_n이 $1-\lambda^n$에 대응한다.

STEP 너머

점 $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$는 볼록 결합(convex combination, 또는 아핀 결합(affine combination))으로, 볼록 집합, 무게중심 좌표(barycentric coordinates), 그리고 컴퓨터 그래픽스의 선형 보간(linear interpolation)의 기본 구성 요소이다. 소문항 (ii)는 $*$가 결합법칙(associative law)을 만족하지 않음을 말해 주고, 소문항 (iii)은 $*$가 자기분배적(self-distributive)임을 말해 준다. 이런 성질을 가진 연산은 대수학에서 랙(rack), 퀀들(quandle), 메디얼 대수(medial algebra) 같은 이름으로 연구된다. 선형대수의 관점에서 보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.