풀이

STEP I 2013, 문제 2

순수수학 • 바닥 함수 방정식

> **STEP I 2013, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q2

핵심 아이디어

함수 $\lfloor x \rfloor$는 각 구간(interval) $[k, k+1)$에서 상수이므로, 그 구간에서 $f(x) = k/x$는 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 한 조각일 뿐이다. 전체 그래프는 정수 k마다 하나씩 있는 이러한 조각들이 이어진 것이다. 따라서 $f(x) = c$를 푸는 일은 어느 조각이 높이 c에 도달하는지를 묻는 일로 귀결된다. k에 해당하는 조각에서 가능한 후보는 $x = k/c$ 하나뿐이며, 이것이 $[k, k+1)$에 들어갈 때에만 정확히 근(root)이 된다.

풀이

소문항 (i)

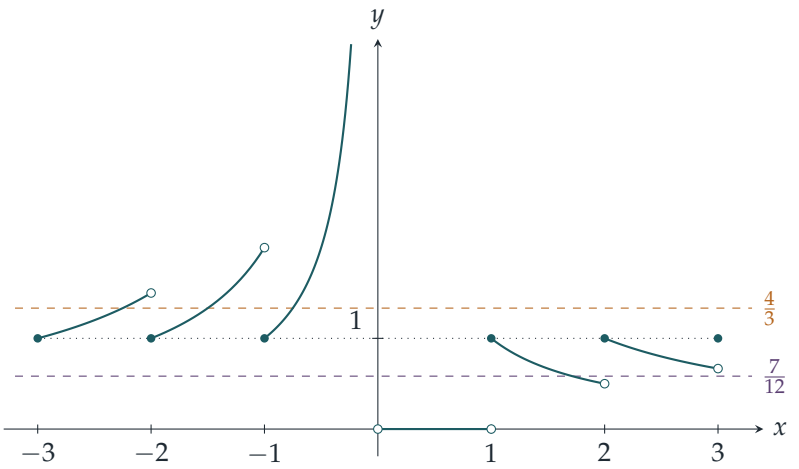
정수 k를 하나 고정하고 $k \le x < k+1$ (단, $x \neq 0$)인 범위를 살펴보자. 여기서 $f(x) = k/x$이다.

- $k = 0$, 즉 $0 < x < 1$인 경우: 이때 $f(x) = 0$이다.
- $k \ge 1$인 경우: $f(x) = k/x$는 $f(k) = 1$에서부터 $k/(k+1)$을 향해 감소하며, 이 값에는 결코 도달하지 않는다. 따라서 이 조각이 갖는 값은 정확히 $\left(\frac{k}{k+1}, 1\right]$이다.
- $k \le -1$인 경우: $m \ge 1$에 대하여 $k = -m$으로 쓰자. 그러면 x와 k가 모두 음수이므로 $f(x) = m/|x| > 0$이다. x가 $-m$에서 $-m+1$을 향해 증가하면 $|x|$는 감소하므로, f는 $f(-m) = 1$에서부터 증가한다. $m \ge 2$이면 f는 $\frac{m}{m-1}$에 가까워지지만 이 값에는 결코 도달하지 않으므로, 이 조각이 갖는 값은 정확히 $\left[1, \frac{m}{m-1}\right)$이다. $m = 1$이면 $x \to 0^-$일 때 $f(x) = -1/x \to +\infty$이므로, 이 조각이 갖는 값은 $[1, \infty)$이다.

$-3 \le x \le 3$에서 각 조각은 다음과 같다.

x	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$
$f(x)$	$-3/x$	$-2/x$	$-1/x$	0	$1/x$	$2/x$
값	$[1,\frac{3}{2})$	$[1,2)$	$[1,\infty)$	0	$(\frac{1}{2},1]$	$(\frac{2}{3},1]$

그리고 마지막으로 $f(3)=1$이다. 모든 조각은 왼쪽 (정수) 끝점에서 높이 1로 시작하며 그 점을 포함하고, 오른쪽 끝은 열려 있다.



소문항 (ii)

$\lfloor x \rfloor = k$인 조각에서 방정식 $f(x)=c$ (단, $c \neq 0$)는 $k/x = c$를 뜻하므로 $x = k/c$이다. 이것은 $k \le k/c < k+1$일 때 정확히 실제 근이 된다. 따라서 각 c에 대해, 소문항 (i)에서 구한 범위를 이용하여 어느 조각이 높이 c에 도달하는지만 판단하면 된다.

$f(x)=\frac{7}{12}$. $0 < \frac{7}{12} < 1$이므로 $k \ge 1$인 조각만 가능하며, $\frac{k}{k+1} < \frac{7}{12}$, 즉 $12k < 7k+7$, 즉 $k < \frac{7}{5}$이어야 한다. 따라서 $k=1$만 가능하고, $x = 1/\frac{7}{12}$로부터

$$x = \tfrac{12}{7}.$$

그래프에서 직선 $y=\frac{7}{12}$는 $[1,2)$ 위의 조각과만 만난다. $[2,3)$ 위의 조각은 $\frac{2}{3}$보다 위에 있기 때문이다.

$f(x)=\frac{17}{24}$. 이번에는 $\frac{k}{k+1} < \frac{17}{24}$, 즉 $24k < 17k+17$, 즉 $k < \frac{17}{7}$이어야 하므로 $k=1$ 또는 $k=2$이다. 근은 $x = k/\frac{17}{24}$이므로

$$x = \tfrac{24}{17} \quad \text{그리고} \quad x = \tfrac{48}{17}.$$

(실제로 $2 \le \frac{48}{17} \approx 2.82 < 3$이다.)

$f(x) = \frac{4}{3}$. $\frac{4}{3} > 1$이므로 음수 쪽 조각만 가능하다. $k = -m$인 조각은 $\frac{4}{3} < \frac{m}{m-1}$일 때 (또는 $m = 1$일 때) $\frac{4}{3}$에 도달하며, 이는 $4m - 4 < 3m$, 즉 $m < 4$와 같다. 따라서 $m = 1, 2, 3$이고, 근은 $x = -m/\frac{4}{3} = -\frac{3m}{4}$이므로

$$x = -\frac{3}{4}, \quad x = -\frac{3}{2}, \quad x = -\frac{9}{4}.$$

$m = 4$인 경우는 아슬아슬하게 실패한다. $[-4, -3)$ 위의 조각은 $\frac{4}{3}$보다 작은 값까지만 올라가기 때문이다.

소문항 (iii)

여기서는 $0 < \frac{9}{10} < 1$이므로, 근은 $k \geq 1$이고 $\frac{k}{k+1} < \frac{9}{10}$, 즉 $10k < 9k + 9$, 즉 $k < 9$인 조각에서 나온다. 따라서 $k = 1, 2, \ldots, 8$이 각각 근 $x = \frac{10k}{9}$를 하나씩 준다. 가장 큰 근은 $k = 8$일 때의 근인

$$x = \frac{80}{9} \approx 8.89,$$

이며, 이 값은 실제로 $[8, 9)$에 속한다.

마지막 소문항

먼저 근이 없거나 무수히 많은 c의 값을 살펴보자.

- $c < 0$: $x > 0$에서 $f(x) \geq 0$이고 $x < 0$에서 $f(x) > 0$이므로 근이 없다.
- $c = 0$: 모든 $x \in (0, 1)$이 근이므로 근이 무수히 많다.
- $c = 1$: 0이 아닌 모든 정수가 근이므로 역시 근이 무수히 많다.

> **생각해 보기** 그래프를 그리지 않고 일반적인 c에 대해 근의 개수를 어떻게 셀 수 있을까?

소문항 (i)에서 구한 범위를 이용한다. 각 조각은 근을 많아야 하나 주므로, 값의 범위가 c를 포함하는 조각의 개수만 세면 된다.

$0 < c < 1$인 경우. c에 도달하는 조각은 $k \geq 1$이고 $\frac{k}{k+1} < c$인 조각이다. $\frac{k}{k+1}$은 k에 대해 증가하므로, 이러한 조각은 $k = 1, 2, \ldots$부터 $\frac{k}{k+1} < c$를 만족하는 마지막 k까지이다. 따라서 근이 정확히 n개인 것은 n번째 조각은 c에 도달하지만 $(n+1)$번째 조각은 도달하지 않을 때, 즉

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2}.$$

일 때와 정확히 같다. ($0 < c \leq \frac{1}{2}$이면 어떤 조각도 c에 도달하지 않으므로 근이 없다.)

$c > 1$인 경우. c에 도달하는 조각은 $k = -m$이고, $m = 1$이거나 $\frac{m}{m-1} > c$인 조각이다. $\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$은 m이 커질수록 감소하므로, 이러한 조각은 $m = 1, 2, \ldots$부터 $\frac{m}{m-1} > c$를 만족하는 마지막 m까지이다. 따라서 근이 정확히 n개인 것은 $m = n$인 조각은 c에 도달하지만 $m = n+1$인 조각은 도달하지 않을 때, 즉

$$\frac{n+1}{n} \le c < \frac{n}{n-1} \qquad (n \ge 2),$$

일 때와 정확히 같고, $n = 1$이면 단순히 $c \ge 2$일 때이다 ($[-1, 0)$ 위의 조각은 항상 c에 도달하고, $c \ge 2$이면 $[-2, -1)$ 위의 조각은 도달하지 않는다).

답. $n \ge 1$에 대하여, 방정식 $f(x) = c$가 정확히 n개의 근을 가질 필요충분조건은

$$\frac{n}{n+1} < c \le \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{n+1}{n} \le c < \frac{n}{n-1},$$

이다. 단, $n = 1$일 때 두 번째 조건은 $c \ge 2$로 읽는다. 등호가 어디에 들어가는지 주목하자. 두 등호 모두 조각의 열린 끝에서 나온다. $c = \frac{n+1}{n+2}$는 $[n+1, n+2)$ 위의 조각이 도달하지 않는 값이고, $c = \frac{n+1}{n}$은 $[-(n+1), -n)$ 위의 조각이 도달하지 않는 값이다. 따라서 이 두 경계값에서도 근은 여전히 정확히 n개이다.

검산

- 다시 대입해 보자. $\lfloor \frac{12}{7} \rfloor = 1$이고 $1/\frac{12}{7} = \frac{7}{12}$; $\lfloor \frac{48}{17} \rfloor = 2$이고 $2/\frac{48}{17} = \frac{17}{24}$; $\lfloor -\frac{9}{4} \rfloor = -3$이고 $-3/(-\frac{9}{4}) = \frac{4}{3}$; $\lfloor \frac{80}{9} \rfloor = 8$이고 $8/\frac{80}{9} = \frac{9}{10}$이다.
- 일반적인 답은 구체적인 경우들과 일치한다. $\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \le \frac{3}{4}$이므로 $n = 2$; $\frac{4}{3} \le \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$이므로 $n = 3$; $\frac{8}{9} < \frac{9}{10} \le \frac{9}{10}$이므로 $n = 8$이다. 마지막 두 경우는 범위의 끝점에 정확히 놓이므로, $\le$와 $<$의 위치를 확인하는 시험이 된다.
- 경계값 하나: $c = 2$는 근을 하나 주어야 한다. 실제로 $x = -\frac{1}{2}$는 근이지만, ($k = -2$에서 나오는) $x = -1$은 $\lfloor -1 \rfloor = -1 \ne -2$이므로 근이 아니다.
- $c = \frac{1}{2}$를 시도해 보자. 조건을 만족하는 n이 없으며, 실제로 $k \ne 0$일 때 $x = k/c = 2k$는 결코 $\lfloor 2k \rfloor = k$를 만족하지 않는다.

흔한 실수

- 음수 x에 대해 $\lfloor x \rfloor$는 **내림**을 한다는 것을 잊는 실수. 즉 $\lfloor -2.25 \rfloor = -3$이지 -2가 아니다. 이것을 잊으면 $c > 1$에 대한 음수 쪽 가지를 통째로 놓치게 된다.
- 끝점을 잘못 처리하는 실수. 각 조각은 높이 1인 왼쪽 (정수) 끝점은 포함하지만 오른쪽 끝점은 포함하지 않는다. 이것이 최종 조건에 $\le$가 들어가는지 $<$가 들어가는지를 결정한다.

▶ 근이 무수히 많은 $c = 0$과 $c = 1$, 또는 근이 없는 $c < 0$과 $0 < c \leq \frac{1}{2}$를 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

$\lfloor x \rfloor / x$와 같은 함수는 각 조각에서는 연속(continuous)이지만 고립된 점에서 값이 뛰는 함수의 가장 간단한 예이다. 어느 끝점에서 값이 실제로 얻어지는지 주의 깊게 따지는 것은 바로 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 상한(supremum)과 하한(infimum)을 다룰 때 필요한 습관이다. 여기서 $x > 0$에서의 sup f는 1이고 이 값은 실제로 얻어지지만, $x \geq 1$에서의 하한은 $\frac{1}{2}$이고 이 값은 얻어지지 않는다. 같은 함수는 또한 $x \to \infty$일 때 $\lfloor x \rfloor / x \to 1$임을 보여 주는데, 이는 해석적 정수론(analytic number theory)에서 쓰이는 어림 계산을 처음 맛보는 것이다. 상한, 극한(limit), 연속성에 대해 더 읽고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.