풀이

STEP I 2013, 문제 11

역학 • 마찰과 평형

> **STEP I 2013, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q11

핵심 아이디어

두 줄은 수평선과 서로 반대쪽에서 각각 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$와 α의 각을 이루므로 서로 수직(perpendicular)이다. 서로 수직인 두 힘 $T\cos\beta$와 $T\sin\beta$는 크기가 T이고 첫 번째 힘에서 β만큼 회전한 방향의 한 힘으로 합쳐진다. 두 줄을 수평선과 $\alpha + \beta$의 각을 이루는 크기 T의 당기는 힘 하나로 바꾸고 나면 두 소문항 모두 짧은 연습 문제가 된다. (i)은 최대 정지 마찰(limiting friction) 문제이고, (ii)는 물체가 면에서 완전히 들어 올려진다는 사실을 알아차리는 문제이다.

풀이

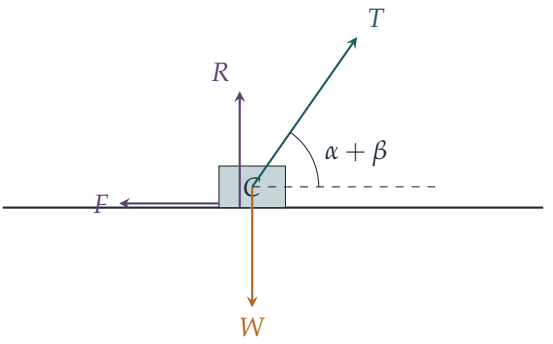
C를 질점(particle)으로, 줄을 가벼운 줄로 모형화한다. x축은 B를 향하는 수평 방향으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다.

장력의 합력

줄 BC는 양의 x축에서 위로 α의 각을 이루는 방향을 가리키므로, 그 단위벡터(unit vector)는 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$이다. 줄 AC는 음의 x축과 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$의 각을 이루므로 양의 x축과 $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$의 각을 이루는 방향을 가리키고, 단위벡터는 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$이다. 이 두 벡터는 서로 수직이다. 따라서 줄들이 당기는 힘의 합은

$$\begin{aligned} T\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + T\sin\beta\,(-\sin\alpha, \cos\alpha) &= T(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ &\qquad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= T(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

이다. 그러므로 두 줄은 수평선 위로 $\alpha+\beta$의 각을 이루며 B 쪽으로 당기는 크기 T의 한 힘과 정확히 같은 작용을 한다. $0<\alpha+\beta<\frac{1}{2}\pi$이므로 두 성분은 모두 양수이다.



소문항 (i)

R를 수직항력(normal reaction), F를 마찰력(friction force)이라 하자. 물체가 정지해 있다면 마찰력은 B에서 멀어지는 수평 방향으로 작용한다. 평형(equilibrium) 조건은

$$\begin{aligned}&\text{연직 방향:}\quad R+T\sin(\alpha+\beta)=W, \qquad \text{따라서} R=W-T\sin(\alpha+\beta),\\ &\text{수평 방향:}\quad F=T\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

이다. 조건 $W>T\sin(\alpha+\beta)$에 의해 $R>0$이므로, 물체는 실제로 면에 눌려 있고 마찰력이 작용할 수 있다. 필요한 마찰력이 그 최댓값을 넘지 않으면, 즉 $F\le\mu R$이면 물체는 정지 상태를 유지한다.

$$T\cos(\alpha+\beta)\le\mu(W-T\sin(\alpha+\beta)).$$

이제 $\mu=\tan\lambda=\sin\lambda/\cos\lambda$를 대입하고 양변에 $\cos\lambda$를 곱한다. λ가 예각이므로 이 값은 양수이다.

$$T\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda\le W\sin\lambda-T\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda.$$

이항하고 $\cos(P-Q)=\cos P\cos Q+\sin P\sin Q$를 이용하면

$$W\sin\lambda\ge T(\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda+\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda)=T\cos(\alpha+\beta-\lambda),$$

을 얻는데, 이것이 구하는 조건이다. (모든 단계를 거꾸로 되짚을 수 있으므로, 사실 물체는 이 조건이 성립할 때, 그리고 그때에만 정지 상태를 유지한다.)

생각해 보기 애초에 조건 $W>T\sin(\alpha+\beta)$가 왜 필요할까?

이 조건이 없으면 연직 방향의 식에서 $R\le0$이 나온다. 면은 밀 수는 있어도 당길 수는 없으므로 음수인 R는 불가능하다. 물체는 들어 올려지거나(또는 겨우 닿아 있을 뿐이고), 물체를 붙잡아 둘 마찰력도 없다. 이것이 바로 소문항 (ii)의 상황이다.

소문항 (ii)

이제 $\alpha+\beta=2\phi$일 때 $W=T\tan\phi$이므로 $0<\phi<\frac{1}{4}\pi$이다. 무게와 줄이 위로 당기는 힘을 비교하자.

$$\begin{aligned} T\sin(\alpha+\beta)-W &= T(2\sin\phi\cos\phi-\tan\phi) \\ &= T\tan\phi\,(2\cos^2\phi-1) \\ &= T\tan\phi\cos 2\phi>0, \end{aligned}$$

이다. $0<\phi<\frac{1}{4}\pi$이면 $\tan\phi$와 $\cos 2\phi$가 모두 양수이기 때문이다. 따라서 줄이 위로 당기는 힘이 중력이 아래로 당기는 힘보다 크다. 물체가 면 위에 머문다면 $R=W-T\sin(\alpha+\beta)<0$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 그러므로 물체는 곧바로 면에서 떨어진다. 즉 $R=0$이고, 접촉이 없으므로 마찰력도 없다.

그러면 작용하는 힘은 각 2ϕ 방향으로 당기는 힘 T와 무게뿐이다. 합력(resultant force)은

$$(T\cos 2\phi,\ T\sin 2\phi-T\tan\phi)=(T\cos 2\phi,\ T\tan\phi\cos 2\phi)=\frac{T\cos 2\phi}{\cos\phi}(\cos\phi,\ \sin\phi),$$

이다. 여기서 연직 성분에는 위의 계산을 이용했다. 합력의 크기 $T\cos 2\phi/\cos\phi$는 양수이므로 0이 아니다. 물체는 정지 상태에서 출발하므로, 처음 가속도, 따라서 물체가 움직이기 시작하는 방향은 합력의 방향이다. 그 방향은 $(\cos\phi,\sin\phi)$로, 수평선 위로 (B 쪽으로) ϕ의 각을 이루며, 이것이 보여야 할 결과이다.

검산

- $T=10\,\mathrm{N}$, $\alpha=20^\circ$, $\beta=40^\circ$로 잡으면 $\phi=30^\circ$이고 $W=10\tan 30^\circ\approx 5.77\,\mathrm{N}$이다. 위로 당기는 힘은 $10\sin 60^\circ\approx 8.66\,\mathrm{N}>W$이고, 합력은 $(10\cos 60^\circ,\ 8.66-5.77)=(5,\ 2.89)$이며, 그 각은 $\arctan(2.89/5)=30^\circ=\phi$이다.
- (i)에서 $\lambda=\frac{1}{2}\pi$(무한히 거친 면)이면 $W\geq T\sin(\alpha+\beta)$가 되는데, 이는 이미 성립하므로 물체는 결코 미끄러지지 않는다. $\lambda\to 0$(매끄러운 면)이면 $0\geq T\cos(\alpha+\beta)$가 되는데, 이는 성립하지 않으므로 매끄러운 면은 물체를 붙잡아 둘 수 없다. 두 경우 모두 예상과 일치한다.
- (i)의 조건은 α,β,T,W,μ를 무작위로 여러 번 골라 직접 판정 $F\leq\mu R$와 비교하는 방식으로 컴퓨터로도 확인했다.

흔한 실수

- 두 줄이 서로 수직임을 알아차리고 먼저 합치는 대신, 각 줄을 따로 분해하다가 계산 속에서 길을 잃는다.

- 소문항 (ii)에서 $R = W - T\sin(\alpha + \beta)$라고 쓰고 R가 음수가 된다는 사실을 알아차리지 못한 채 마찰력 계산을 계속한다.
- 정지 상태에서 출발한 질점이 처음에 합력의 방향으로 움직인다는 사실을 정당화하는 것을 잊는다.

STEP 너머

마찰각(angle of friction) λ의 핵심은, 수직항력과 최대 정지 마찰력이 합쳐져 법선과 λ의 각을 이루는 하나의 전체 반력(total reaction)이 된다는 것이다. 평형은 전체 반력이 이 "마찰 원뿔(cone of friction)" 안에 놓일 수 있을 때, 그리고 그때에만 가능하다. 소문항 (i)은 바로 이 명제를 다른 모습으로 나타낸 것이며, 같은 그림으로 3차원에서의 마찰과 강체(rigid body) 문제에서의 마찰도 다룰 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰, 구속 조건, 접촉력을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.