풀이

STEP I 2013, 문제 10

역학 • 반발 계수와 마찰

> **STEP I 2013, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q10

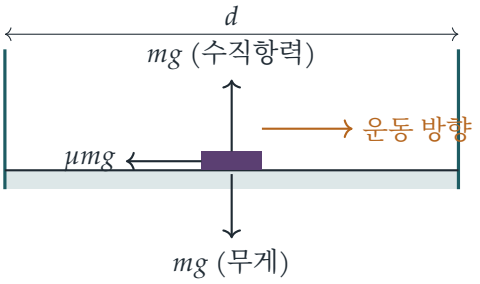
핵심 아이디어

충돌과 충돌 사이에 작용하는 수평 방향의 힘은 마찰력(friction)뿐이므로 퍽은 일정한 감속도(deceleration) μg를 가지고, 등가속도 공식(constant-acceleration formula) $v^2 = u^2 + 2as$가 한 벽을 떠날 때의 속력과 다음 벽에 도달할 때의 속력을 이어 준다. 그다음 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 도달 속력에 r이 곱해진다. 그 결과 v_i^2에 대한 선형 점화식(linear recurrence)을 얻는데, 선형 점화식 $w_{i+1} = aw_i + b$는 고정점(fixed point)만큼 평행이동하면 풀 수 있고, 그러고 나면 단순한 등비수열(geometric sequence)이 된다.

풀이

점화식

퍽을 벽에 수직인 직선 위를 움직이는 입자로 모형화한다. 충돌과 충돌 사이에 퍽이 얼음 위에 있는 동안 수직항력(normal reaction)은 mg이고(연직 방향 가속도가 없으므로), 퍽이 미끄러지고 있으므로 마찰력은 한계값(limiting value) μmg를 가지며 운동을 방해하는 방향으로 작용한다.



뉴턴의 제2법칙에 의해 감속도는 일정한 값 μg이므로, (i번째 충돌 직후) 속력 v_i로 출발하여 길이 d를 한 번 가로지를 때 반대쪽 벽에 도달하는 속력 u는 다음을 만족한다.

$$u^2 = v_i^2 - 2\mu g d.$$

벽은 고정되어 있으므로, 뉴턴의 반발 법칙에 따르면 퍽은 접근 속력의 r배의 속력으로 튕겨 나간다. 즉 $v_{i+1} = ru$이다. 양변을 제곱하면

$$v_{i+1}^2 = r^2u^2 = r^2v_i^2 - 2r^2\mu g d, \qquad \text{따라서} \qquad v_{i+1}^2 - r^2v_i^2 = -2r^2\mu g d,$$

이므로 요구된 식이 성립한다. 출발 속력을 $v_0 = v$로 쓰면 첫 번째 가로지르기에도 같은 논증이 적용되므로, 이 점화식은 모든 $i \geq 0$에 대해 성립한다.

가로지르는 횟수

양변을 $2\mu g d$로 나누고 $w_i = \dfrac{v_i^2}{2\mu g d}$로 두면 $w_0 = k$이고

$$w_{i+1} = r^2(w_i - 1).$$

이다. "n번 가로지른 뒤 벽에 닿아 정지한다"는 것은 n번째 가로지르기가 끝날 때 퍽이 속력 0으로 벽에 도달한다는 뜻이다. 그러면 퍽은 속력 0으로 벽을 떠나므로 $v_n = 0$, 즉 $w_n = 0$이다(그리고 $i < n$이면 $w_i > 0$이다).

> **?** **생각해 보기** $w_{i+1} = r^2(w_i - 1)$은 어떻게 풀까?

상수해 $w_i = c$를 찾아보자. $c = r^2(c-1)$이어야 하므로 $c = -\dfrac{r^2}{1-r^2}$이고, $r \neq 1$이므로 이 값은 잘 정의된다. 점화식에서 $c = r^2(c-1)$을 빼면

$$w_{i+1} - c = r^2(w_i - c),$$

이므로 $w_i - c$는 공비가 r^2인 등비수열이다.

$$w_i = c + r^{2i}(k - c).$$

$w_n = 0$으로 놓으면 $r^{2n}(k-c) = -c$, 즉

$$r^{2n}\left(k + \frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^{2n-2}(k(1-r^2)+r^2) = 1.$$

이다. 양변에 r^{-2n}을 곱하여 정리하면

$$r^{-2n} = 1 + k(r^{-2}-1), \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{n = \frac{\ln\left(1+k(r^{-2}-1)\right)}{2\ln(1/r)}}$$

이다($0 < r < 1$이면 $\ln(1/r) > 0$이고, $k > 0$이며 $r^{-2} > 1$이므로 로그의 진수는 1보다 크다. 따라서 마땅히 그래야 하듯 $n > 0$이다).

$r = \mathrm{e}^{-1}$인 경우

이때 $r^{-2} = \mathrm{e}^2$이고 $\ln(1/r) = 1$이므로 공식은

$$n = \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + k(\mathrm{e}^2 - 1)\right),$$

가 되고, 이것이 요구된 결과이다.

$r = 1$인 경우

점화식은 $w_{i+1} = w_i - 1$이 된다. 벽에서 손실이 없으므로 한 번 가로지를 때마다 v^2이 정확히 $2\mu g d$만큼 줄어든다. 따라서 $w_i = k - i$이고, $w_n = 0$에서

$$n = k = \frac{v^2}{2\mu g d}.$$

를 얻는다. 이것은 바로 에너지 관계이다. 처음 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$이 전체 거리 nd에 걸쳐 마찰에 의해 모두 소산되므로 $\frac{1}{2}mv^2 = \mu m g\, nd$이다.

검산

- $r = \mathrm{e}^{-1}$일 때 $w_3 = 0$에서 출발하여 점화식을 거꾸로 적용하면 $w_2 = 1$, $w_1 = \mathrm{e}^2 + 1$, $w_0 = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1 \approx 62.99$이다. 공식에 넣으면 $\frac{1}{2}\ln\left(1 + (\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\right) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^6 = 3$이 되어 마땅히 나와야 할 값이 나온다.
- $r \to 1$일 때 $r^{-2} - 1 \approx 2(1-r)$이고 $\ln(1/r) \approx 1 - r$이므로, 일반 공식은 $\dfrac{2k(1-r)}{2(1-r)} = k$에 가까워지며 $r = 1$일 때의 답과 일치한다.
- k는 무차원(dimensionless)량이다(v^2과 gd 모두 속력의 제곱이다). n도 당연히 무차원이어야 한다.
- 임의의 μ, d, r, v에 대해 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보면 점화식이 높은 정확도로 확인된다.

흔한 실수

- v_i^2에 반발 법칙을 적용하면서 r^2 대신 r을 곱하는 것. 반발 법칙은 속력에 관한 것이므로 속력의 제곱에는 r^2이 곱해지고, 마찰 항에도 마찬가지로 곱해진다.
- n이 0이 아닌 속력으로 튕겨 나오는 충돌의 횟수가 아니라 가로지른 횟수라는 점을 잊는 것. 조건은 $v_0 = v$일 때 $v_n = 0$이다.

STEP 너머

점화식 $w_{i+1} = aw_i + b$는 가장 간단한 선형 차분방정식(difference equation)이며, 고정점을 빼는 요령은 선형 미분방정식에서 만나게 될 "여함수(complementary function)와 특수해(particular solution)의 합" 방법과 정확히 같다. 이와 같이 튕기는 문제들(바닥에서 튀는 공이 고전적인 예이다)은 에너지 소산(energy dissipation)의 좋은 예이기도 하고, 마찰이 없을 때 유한한 시간 안에 무한히 많은 사건이 일어나는 현상의 좋은 예이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 마찰을 더 깊이 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.