풀이

# STEP I 2013, 문제 1

순수수학 • 제곱근이 있는 방정식

> **STEP I 2013, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q1

## 핵심 아이디어

각 방정식은 겉모습만 다를 뿐 사실 이차방정식(quadratic equation)이다. 제곱근을 $y$라 하고 나머지를 모두 $y$로 나타내면 $y$에 대한 평범한 이차방정식을 얻는다. 단 하나 조심할 점은 제곱근이 절대 음수가 될 수 없으므로 $y \geq 0$이라는 것이다. 매번 가짜 근을 걸러 내는 것이 바로 이 조건이다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$y = \sqrt{x}, y \geq 0$으로 두면 $x = y^2$이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$y^2 + 3y - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

음의 부호를 택하면 음수가 나오는데, 이는 제곱근의 값으로 불가능하다. $\sqrt{11} > 3$이므로 양의 부호를 택하면 $y = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 3) > 0$이고, 따라서 이것이 유일한 경우이다. 그러면

$$x = y^2 = \frac{11 - 6\sqrt{11} + 9}{4} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

$y \geq 0$임을 알고 나면 모든 단계를 거꾸로 되돌릴 수 있으므로, 이것이 실제로 (유일한) 실근이다.

### 소문항 (ii)(a)

여기서는 $x+2$의 제곱근이 있으므로 $y=\sqrt{x+2}, y\geq 0$으로 두면 $x=y^2-2$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$y^2-2+10y-22=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^2+10y-24=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (y+12)(y-2)=0.$$

$y\geq 0$이므로 $y=-12$는 버린다. 따라서 $y=2$이고 $x=2^2-2=2$이다.

확인: $2+10\sqrt{4}-22=0$. 유일한 실근은 $x=2$이다.

> **생각해 보기** $y=-12$를 버리지 않았다면 어떻게 되었을까?

그러면 $x=144-2=142$가 되는데, $142+10\sqrt{144}-22=240\neq 0$이다. $y=-12$라는 값은 관련된 방정식 $x-10\sqrt{x+2}-22=0$의 근이며, 부주의하게 양변을 제곱하면 결국 이 방정식을 풀게 된다. 두 방정식을 정확히 구별해 주는 것이 바로 조건 $y\geq 0$이다.

### 소문항 (ii)(b)

이번에는 치환(substitution)이 주어지지 않았으므로 직접 찾아야 한다. 근호 안의 식은

$$2x^2-8x-3=2(x^2-4x)-3,$$

이고, $x^2-4x$는 근호 밖에도 나타난다. 이것이 연결 고리이다.

> **생각해 보기** 여기서 $y$를 무엇으로 두어야 할까? $x^2-4x$일까, 아니면 제곱근 전체일까?

$y$를 제곱근으로 두면 방정식이 근호가 전혀 없는 이차방정식이 된다. $y=\sqrt{2x^2-8x-3}$, $y\geq 0$으로 두자. 그러면 $y^2=2(x^2-4x)-3$이므로

$$x^2-4x=\frac{y^2+3}{2}.$$

이를 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{y^2+3}{2}+y-9=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad y^2+2y-15=0\\ &\Longleftrightarrow\quad (y+5)(y-3)=0.\end{aligned}$$

$y\geq 0$이므로 $y=3$이어야 한다. 그러면

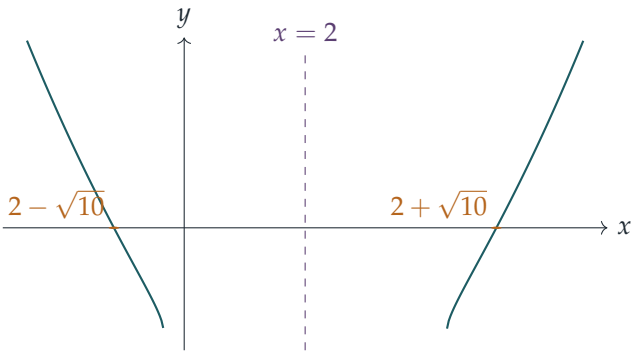
$$2x^2-8x-3=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{10}.$$

두 값 모두 $2x^2-8x-3$을 양수인 9로 만들므로, 제곱근이 정의되고 그 값은 3이다. 따라서 둘 다 진짜 근이며, 실근은 다음과 같다.

$$x=2+\sqrt{10} \quad\text{그리고}\quad x=2-\sqrt{10}.$$

방정식이 $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$를 통해서만 $x$에 의존하므로, 두 근이 $x = 2$에 대하여 대칭(symmetric)인 것은 당연하다.

좌변의 그래프를 보면 이를 확인할 수 있다. 좌변은 $2x^2 - 8x - 3 \geq 0$인 곳, 즉 $x \leq 2 - \sqrt{5.5}$ 또는 $x \geq 2 + \sqrt{5.5}$에서만 정의되며, 각 갈래에서 한 번씩 0을 지난다.




## 검산

- 소문항 (i): $x = \frac{1}{2}(10 - 3\sqrt{11}) \approx 0.02506$이므로 $\sqrt{x} \approx 0.1583$이고 $x + 3\sqrt{x} \approx 0.02506 + 0.47494 = 0.5$이다.
- 소문항 (ii)(b): $x = 2 + \sqrt{10} \approx 5.1623$이면 $x^2 - 4x = 6$이고 $2x^2 - 8x - 3 = 9$이므로 좌변은 $6 + 3 - 9 = 0$이다. 버린 값 $y = -5$가 되려면 $x^2 - 4x = 14$여야 하는데, 그러면 좌변은 $14 + 5 - 9 = 10 \neq 0$이다.
- 각 좌변을 정의역(domain) 전체에서 수치적으로 훑어보면 위의 근들만 정확히 나오고 다른 근은 없다.

## 흔한 실수

- $y$에 대한 이차방정식의 음의 근을 그대로 두는 것. 제곱근은 절대 음수가 아니므로 그 근은 해를 주지 않는다.
- (ii)(b)에서 곧바로 양변을 제곱하는 것. 그러면 훨씬 어려운 사차방정식(quartic equation)이 나오고, 일일이 확인해야 하는 여분의 근까지 생긴다.
- (ii)(a)에서 $x$가 $y^2$이 아니라 $x = y^2 - 2$라는 것을 잊는 것.

## STEP 너머

새로운 변수를 도입해 어려운 방정식을 익숙한 방정식으로 바꾸는 것은 수학에서 가장 유용한 습관 가운데 하나이다. (ii)(b)에서 방정식은 $x^2 - 4x$에만 의존하므로 $(x-2)^2$의 함수이다. 이런 대칭을 알아차리고 그 대칭에 의해 변하지 않는 양을 가지고 작업하는 방법은 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)에서 다시 등장한다. 갈루아 이론에서는 대칭에 의해 고정되는, 근들로 이루어진 식을 찾아 다항방정식(polynomial equation)을 푼다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이런 개념으로 들어가는 부드러운 입문서이다. 이런 종류의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)가 훌륭하다(게다가 무료이다).

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.