풀이

STEP III 2012, 문제 9

역학 • 회전하는 도르래의 역학

STEP III 2012, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

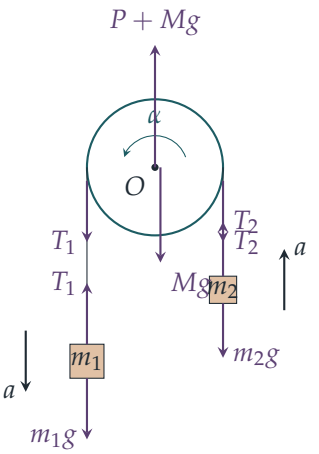
step.maths.org/questions/12-s3-q9

핵심 아이디어

축(axle)에 걸리는 힘을 측정한 값이 실마리이다. 도르래(pulley)의 질량중심(centre of mass)은 움직이지 않으므로, 축은 도르래의 무게를 떠받치는 동시에 두 줄의 장력(tension)과도 균형을 이루어야 한다. 따라서 P는 두 장력의 합이 되고, 이로부터 입자(particle)의 가속도(acceleration)가 나온다. 가속도를 알면 도르래의 회전 운동 방정식에서 관성 모멘트(moment of inertia)를 구할 수 있다. 마찰 짝힘(friction couple)은 이 방정식 하나만 바꿀 뿐 다른 것은 바꾸지 않는다.

풀이

모형. 입자는 질점(point mass)이고 줄은 가볍고 늘어나지 않는다(inextensible). 줄은 도르래 위에서 미끄러지지 않으므로 줄의 속력은 원판 가장자리의 속력과 같다. 계가 정지 상태에서 놓였다고 보면, 더 무거운 입자 m_1이 내려간다. m_1의 아래 방향 가속도를 a라 하면, 이는 m_2의 위 방향 가속도이기도 하다. 그러면 도르래의 각가속도(angular acceleration)는 $\alpha = a/r$이다. m_1 쪽 줄의 장력을 T_1, m_2 쪽 줄의 장력을 T_2라 한다(도르래에 관성이 있으므로 두 값은 다르다). 축에 대한 관성 모멘트를 I라 한다.



각 입자에 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$m_1g - T_1 = m_1a, \qquad T_2 - m_2g = m_2a,$$

이므로

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

축에 걸리는 힘. 도르래의 질량중심은 고정된 점 O에 있으므로, 도르래에 작용하는 알짜힘은 0이다. 도르래에 작용하는 힘은 무게 Mg, 두 장력(양쪽 모두 줄이 연직으로 늘어져 있으므로 둘 다 아래로 당긴다), 그리고 축이 주는 힘이다. 마찰 짝힘(소문항 (ii)에서 추가한다)은 합력이 없으므로 여기에는 들어가지 않는다. 따라서 축에 걸리는 연직 방향의 힘은 $Mg + T_1 + T_2$이고, 이를 측정값과 비교하면

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

이므로

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

이 식은 측정값과 입자의 운동 방정식만 사용하므로 두 소문항 모두에서 성립한다.

소문항 (i)

축에 마찰이 없으면 O에 대한 모멘트를 갖는 것은 장력뿐이다. 축에 대한 모멘트를 구하면

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{따라서} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

그런데 $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$이므로

$$I = r^2\left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2)\right).$$

a에 (1)을 대입하면

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right) \\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P} \\ &= \frac{((m_1+m_2)P-4m_1m_2g)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$를 이용하였다. 이것이 요구된 식 $(*)$이다.

소문항 (ii)

새로 계산한 값을 I'이라 하자. 마찰 짝힘 C는 회전을 방해하고, 회전은 T_1이 일으키는 방향이므로 모멘트 방정식은

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

이 된다. 같은 측정값 P를 사용하고 축에 걸리는 힘에 대한 논증에는 C가 관여하지 않으므로, 가속도는 여전히 (1)로 주어진다. 따라서 T_1-T_2와 a는 소문항 (i)과 정확히 같고,

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

? **생각해 보기** a의 부호는 어떻게 알 수 있을까?

계는 정지 상태에서 출발하고 도르래는 m_1이 내려가는 방향으로 돌므로, m_1의 아래 방향 가속도는 양수여야 한다. (a가 0이거나 음수라면 m_1은 결코 아래로 움직이기 시작하지 않는다.) 따라서 $a>0$이다. $C>0$이고 $r>0$이므로 $Cr/a>0$이고, **마찰을 고려하여 계산한 값은 $(*)$보다 작다**. 이는 이치에 맞는다. 장력이 만드는 알짜 토크(torque)의 일부가 마찰을 이기는 데 쓰이므로, 같은 가속도를 관측했을 때 이를 설명하는 데 필요한 관성은 더 작다.

C의 상계. 모멘트 방정식에 장력을 대입하면

$$((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a)r-C=\frac{I'a}{r},$$

이고, 이를 정리하면

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

우변에서 $a>0$, $I'\geq 0$(관성 모멘트는 음수일 수 없다), $(m_1+m_2)r>0$이므로 우변은 엄격히 양수이다. 따라서

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

이고, 요구된 결과가 증명된다. 말로 하면, 마찰 짝힘은 두 무게의 차이가 만드는 짝힘 $(m_1-m_2)gr$보다 작아야 한다. 그렇지 않으면 계는 아예 움직이기 시작하지 않는다.

검산

- **가벼운 도르래**: $I = 0$이고 $C = 0$이면 $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$(익숙한 앳우드(Atwood) 장치의 결과)이고 $P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$이다. 이때 $(*)$의 분자는 마땅히 0이 된다.
- **정지한 도르래**: $a \to 0$이면 $P \to (m_1 + m_2)g$이고, $(*)$의 분모는 0으로 가며 $(*)$는 발산한다. 무한히 무거운 도르래는 가속되지 않는다.
- **수치 검산**: $g = 9.8$, $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $r = 0.5$, $I = 0.7$, $C = 2$(SI 단위)로 두면, 실제 운동에서 $a \approx 2.29\ \mathrm{m\,s^{-2}}$이고 $P \approx 34.6$ N이다. 식 $(*)$는 $I \approx 1.14$를 주는데, 이는 정확히 $Cr/a \approx 0.44$만큼 크며, 마찰 모형은 0.7을 되돌려 준다. 여기서 $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$이다. 같은 방법으로 무작위 사례 10^4개를 검사하였다.

흔한 실수

- 양쪽의 장력을 같다고 놓는 것. 이는 가볍거나 마찰이 없는 도르래에서만 성립하며, 여기서 그렇게 하면 문제에서 I가 사라져 버린다.
- 축에 걸리는 힘에서 도르래 자신의 무게를 빠뜨리는 것. 측정값을 $P + Mg$로 쓴 이유가 바로 이것이다.
- 마찰 짝힘이 축에 걸리는 힘을 바꾼다고 생각하는 것. 짝힘은 합력이 0이므로 두 소문항 모두에서 $P = T_1 + T_2$이다.

STEP 너머

이것은 **측정값으로부터 숨은 매개변수를 추론하는 것**의 작은 예이다. 답은 가정한 모형에 따라 달라지며, 마찰을 빠뜨리면 추정값이 예측 가능한 방향으로 치우친다. 대학 1학년 역학에서는 강체를 선운동량과 각운동량의 모든 도구를 갖추어 다루며, 일반적인 축에 대해 회전하는 물체의 관성 모멘트는 텐서(tensor)가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축 회전과 질량이 있는 도르래를 가진 앳우드 장치를 깊이 있게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.