풀이

STEP III 2012, 문제 8

순수수학 • 피보나치 망원급수

> **STEP III 2012, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q8

핵심 아이디어

(ii)의 식은 n이 하나 커질 때마다 부호가 바뀌며, 소문항 (i)은 바로 그런 규칙성을 찾아보라는 힌트이다. 홀수 n에 대한 값을 알고 나면 (iii)의 arctan 항등식(identity)은 $\tan(A-B)$ 공식을 다른 모습으로 쓴 것에 지나지 않는다. 이 항등식을 정리하면 급수(series)의 각 항이 두 arctan의 차로 표현되므로, 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping).

풀이

처음 몇 항은 다음과 같다.

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

소문항 (i)

이 값들을 이용하면

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

이므로 요구한 대로 두 식의 값은 같다.

소문항 (ii)

$G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$라 하자. 소문항 (i)은 $G_0 = G_2$임을 말해 주므로, G_{n+1}과 G_n을 비교해 볼 만하다. 점화식(recurrence)을 $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$의 꼴로 쓰면

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

이다. 여기서 넷째 줄에서는 점화식 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$을 다시 사용하였다.

따라서 G_n은 한 단계마다 부호가 바뀐다. 소문항 (i)에서 $G_0 = -1$이므로, (n에 대한 수학적 귀납법(induction)에 의해) $G_n = (-1)^{n+1}$이다. 두 경우를 나누어 쓰면

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & n\text{이 짝수일 때,} \\ 1 & n\text{이 홀수일 때.} \end{cases}$$

이다. 예를 들어 $n = 1$이면 $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$이고, $n = 4$이면 $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$이다.

소문항 (iii)

$r \geq 1$을 고정하고

$$\alpha = \arctan\frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}}.$$

이라 하자. $k \geq 1$인 모든 F_k는 양의 정수이므로 이들은 잘 정의된다. 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

이다. 여기서 $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$을 사용하였다. 이제 **홀수** 값 $n = 2r - 1$에 소문항 (ii)를 적용하면

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{이므로} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

이다. $F_{2r-1} \geq 1$이므로 이 값은 0이 아니어서 약분할 수 있다.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

생각해 보기 탄젠트 값이 같다고 해서 항상 각이 같은 것은 아니다. 그렇다면 왜 $\alpha - \beta = \arctan(1/F_{2r+2})$라고 결론지을 수 있는가?

tan은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 일대일(one-to-one)이므로, 두 각이 모두 이 구간에 속함을 확인하면 충분하다. $1 \le F_{2r} \le F_{2r+1}$이므로 $0 < \beta \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$이고, 따라서 $0 \le \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$이다. 또한 $\arctan(1/F_{2r+2})$는 정의에 의해 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속한다. 그러므로

$$\arctan\frac{1}{F_{2r}} = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2r+2}} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

이고, 이것이 증명해야 할 항등식이다.

합. 항등식을 정리하면

$$\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \arctan\frac{1}{F_{2r}} - \arctan\frac{1}{F_{2r+2}},$$

이므로 부분합(partial sum)이 연쇄적으로 소거된다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} &= \left(\arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_4}\right) + \left(\arctan\frac{1}{F_4} - \arctan\frac{1}{F_6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\arctan\frac{1}{F_{2N}} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\ &= \arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

여기서 $F_2 = 1$을 사용하였다. $n \ge 2$이면 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ge F_n + 1$이므로 $F_n \to \infty$이다. 따라서 $1/F_{2N+2} \to 0$이고, arctan은 연속(continuous)이며 $\arctan 0 = 0$이므로, $N \to \infty$로 보내면

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

을 얻는다.

검산

- $r = 1$: 항등식은 $\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$을 뜻한다. 우변의 tan 값이 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})/(1 - \frac{1}{6}) = 1$이므로, 이것은 잘 알려진 $\frac{\pi}{4}$ 항등식이다.
- 처음 세 항의 합은 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} \approx 0.4636 + 0.1974 + 0.0768 = 0.7378$이고, 이는 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{21} \approx 0.7378$과 일치한다.
- 수치적으로 급수의 89개 항을 더하면 $0.785398163\ldots$이 되어, 기계 정밀도 범위에서 $\frac{\pi}{4}$와 일치한다. 또한 소문항 (ii)의 공식은 $n < 150$인 모든 n에 대하여 정확히 성립한다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 (ii)의 짝수인 경우를 사용하는 것. 그곳의 첨자는 $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$이므로 $n=2r-1$은 홀수이고, 값은 $+1$이다.
- 두 각이 모두 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하는지 확인하지 않고 탄젠트 값이 같다는 것에서 바로 각이 같다고 결론짓는 것.
- 소거된 합의 첫 항을 잘못 쓰는 것: 첫 항은 $\arctan(1/F_1)$이 아니라 $\arctan(1/F_2) = \frac{\pi}{4}$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 카시니(Cassini) 항등식 $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$의 사촌 격이다. 두 항등식 모두 행렬(matrix) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$을 통해 이해하는 것이 가장 좋다. 이 행렬의 n제곱은 피보나치(Fibonacci) 수들을 성분으로 가지므로, 행렬식(determinant)을 취하면 곧바로 카시니 항등식을 얻는다. 망원급수(telescoping series)와, 부분합에서 극한으로 넘어갈 때 필요한 세심함은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 단골 주제이다. 이에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 읽기 좋으며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 점화식을 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.