풀이

STEP III 2012, 문제 7

순수수학 • 연립 미분방정식

> **STEP III 2012, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q7

핵심 아이디어

연립된(coupled) 두 1계 방정식(first-order equation)은 변수 하나를 소거(eliminate)하면 하나의 2계 방정식(second-order equation)이 된다. $\dot{y}$에 대한 방정식을 미분한 다음, 첫 번째 방정식 자체를 이용하여 z를 y와 $\dot{y}$로 나타내면 된다. 그 뒤로는 각 소문항에서 상수 A와 B를 정하기만 하면 된다. 소문항 (iii)의 무한합은 두 개의 등비급수(geometric series)이고, 그 결과를 소문항 (ii)와 맞추어 보면 c가 정해진다. 물리적으로 z_2는 단위 시간마다 같은 양을 한 번씩 주사할 때 도달하는 정상 상태(steady state)이다.

풀이

일반해

$\dot{y} = -2y + 2z$를 미분한 다음 $\dot{z}$ 자리에 두 번째 방정식을 대입하면

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

첫 번째 방정식으로부터 z를 y로 나타내면

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{따라서} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

이를 대입하면

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

특성방정식(auxiliary equation) $m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$의 근은 $m = -1$과 $m = -6$이므로, 임의의 상수 A와 B에 대하여

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

이다. 그러면 z는 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$로부터

$$z = Ae^{-t}(1 - \tfrac{1}{2}) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

가 되어, 구하려던 결과를 얻는다.

생각해 보기 y에 대한 방정식을 얻을 때는 두 방정식을 모두 썼지만, z를 구할 때는 첫 번째 방정식만 썼다. 이렇게 구한 쌍이 정말로 두 번째 방정식도 만족하는가?

만족한다. $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$이면 $\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$이다. 또한 $-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$이므로 둘은 같다. 따라서 연립방정식의 모든 해는 이 꼴이고, 이 꼴의 모든 쌍은 해이다.

소문항 (i)

$t = 0$에서 $y(0) = A + B$이고 $z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$이다. 주어진 조건으로부터

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

이므로 $A = 4B$이고, 따라서 $5B = 5$이다. 그러므로 $B = 1$, $A = 4$이고

$$y = 4e^{-t} + e^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-6t}.$$

약물은 혈액 속에서 출발하며, 뇌 속의 양은 0에서부터 증가하다가 흡수되면서 감소한다.

소문항 (ii)

$a = \frac{1}{2}A$, $b = 2B$로 두면 $z = ae^{-t} - be^{-6t}$이다. 조건은

$$a - b = c, \qquad ae^{-1} - be^{-6} = c.$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $a(1 - e^{-1}) = b(1 - e^{-6})$이다. 이 공통의 값을 k라 하면

$$a = \frac{k}{1 - e^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - e^{-6}}, \qquad \text{그리고} \qquad c = a - b = kC,$$

이다. 여기서

$$C = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-6}}.$$

$e^{-1} > e^{-6}$이므로 $1 - e^{-1} < 1 - e^{-6}$이고, 따라서 $C > 0$이다. 특히 $C \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있어서 $k = c/C$이다. (같은 말로, 두 일차방정식의 행렬식(determinant)이 $e^{-1} - e^{-6} \neq 0$이므로 해는 유일하다.) 그러므로

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-6t}}{1 - e^{-6}}\right),$$

$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-1}} + \frac{e^{-6t}}{2(1 - e^{-6})}\right),$$

이다. 여기서 y_2는 $A = 2a$와 $B = \frac{1}{2}b$로부터 얻는다.

소문항 (iii)

$m = -n$으로 두면 m은 $0, 1, 2, \ldots$를 지나고 $t - n = t + m$이다. 소문항 (i)을 이용하면

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} (2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m).$$

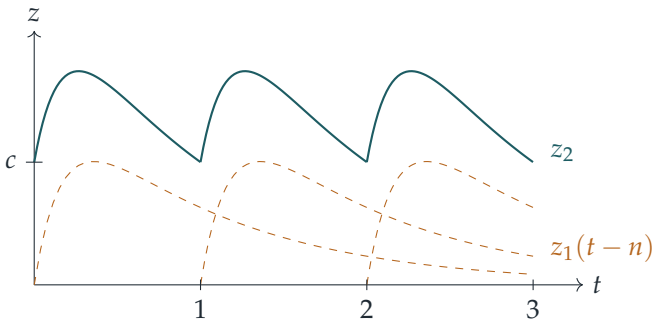
두 부분은 모두 공비가 e^{-1}과 e^{-6}인 등비급수이고, 이 공비들은 0과 1 사이에 엄격히 놓이므로 각각 수렴(converge)한다. 따라서 따로따로 합을 구할 수 있다.

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

이것은 $z_2(t)$의 괄호 안의 식에 정확히 2를 곱한 것이다. 따라서 $0 \le t \le 1$에서 항등식이 성립할 필요충분조건은 $c/C = 2$, 즉

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

이다. (다른 c에 대해서는 양변의 차가 0이 아닌 같은 함수의 0이 아닌 상수배가 되므로, 이 값이 유일하다.)



그림이 그 의미를 보여 준다. 시각 n에 혈액에 주사한 양 5의 약물은 뇌에서 곡선 $z_1(t-n)$(점선)을 만든다. 먼 과거부터 매 정수 시각마다 약물을 주사하면, 뇌 속의 양은 이 모든 반응의 합이다. 그 합은 단위 시간마다 반복되며(실선), $[0, 1]$에서는 이 c 값에 대한 z_2와 같다.

검산

- 소문항 (i)에서 $z_1(0) = 2 - 2 = 0$이고 $y(0) = 4 + 1 = 5$이다.
- 소문항 (iii)에서 $z_2(0)$과 $z_2(1)$은 모두 c와 같아야 한다. 합에서 $t = 1$일 때의 급수는 $t = 0$일 때의 급수에서 첫째 항을 뺀 것이고, 그 항은 $z_1(0) = 0$이다. 이로써 아무 계산 없이 $z(0) = z(1)$이 확인된다.

- $c = 2C$일 때 $y_2(0) - y_2(1) = 4 + 1 = 5$이다. 즉 각 주기 동안 혈액은 정확히 한 번 주사한 양만큼을 잃고, 다음 주사가 그만큼을 채운다.
- 수치로는 $c \approx 1.15898$이다. $t = 0.37$에서 $z_1(t + m)$을 200개 항까지 더하면 $1.967693\ldots$이 되어, $z_2(0.37)$과 소수점 아래 12자리까지 일치한다.

흔한 실수

- z가 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$를 통해 y로 정해진다는 것을 잊고, z에 대한 방정식을 따로 풀어 새로운 독립 상수를 도입하는 실수.
- 소문항 (iii)에서 평행이동의 방향을 잘못 잡는 실수. $n \leq 0$이면 $t - n \geq t$이므로 과거에 주사한 양만 기여한다.

STEP 너머

이것은 선형 구획 모델(linear compartment model)로, 2×2 행렬 M을 써서 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$로 쓸 수 있다. 감소율 1과 6은 M의 고윳값(eigenvalue)에 음의 부호를 붙인 것이며, 이것이 대학 1학년 과정에서 만나는 선형 연립방정식에 대한 행렬 지수(matrix exponential)의 관점이다. 소문항 (iii)은 중첩(superposition)의 간단한 예이다. 반복된 충격에 대한 반응은 하나의 충격 응답(impulse response)을 평행이동한 것들의 합이다. 이 아이디어는 그린 함수(Green's function)와 합성곱(convolution)으로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 선형 연립방정식과 충격 응답을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.