풀이

STEP III 2012, 문제 6

순수수학 • 복소근의 자취

> **STEP III 2012, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q6

핵심 아이디어

복소수(complex number)는 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)가 모두 0일 때, 그리고 그때에만 0이다. 따라서 $z = x + \mathrm{i}y$에 대한 복소수 방정식 하나는 x, y, p에 대한 실수 방정식 두 개가 된다. 허수부 방정식은 항상 y를 인수로 갖도록 인수분해(factorise)되며, 이 때문에 모든 자취(locus)가 "실근"과 "허근"의 두 부분으로 나뉜다. 각 경우에 p를 소거(eliminate)하여 (x, y)-평면의 곡선을 얻고, 그다음 그 곡선 위의 어떤 점들이 실제로 실수 p의 값에서 나오는지 확인한다.

풀이

첫 번째 방정식 $z^2 + pz + 1 = 0$

x, y가 실수일 때 $z = x + \mathrm{i}y$로 놓는다. 그러면

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

p가 실수이므로 두 괄호는 각각 실수부와 허수부이고, 둘 다 0이 되어야 한다.

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

이로써 요구된 식을 얻는다.

두 번째 방정식에서 $p = -2x$이거나 $y = 0$이다. $y = 0$이면 첫 번째 방정식은 $x^2 + px + 1 = 0$이 된다. 이때 $x = 0$이면 $1 = 0$이 되므로 $x \neq 0$이고, 따라서 x로 나누어 $p = -(x^2 + 1)/x$를 얻을 수 있다. 그러므로 $p = -2x$이거나, $x \neq 0$이면서 $p = -(x^2 + 1)/x$이다(두 번째 경우에는 $y = 0$이다).

근의 자취. $p = -2x$인 경우. 실수부 방정식에 대입하면 $x^2 - y^2 - 2x^2 + 1 = 0$, 즉

$$x^2 + y^2 = 1.$$

역으로, 단위원(unit circle) 위의 임의의 점 $x + \mathrm{i}y$를 잡고 실수 $p = -2x$로 놓자. 그러면 $(2x + p)y = 0$이고 $x^2 - y^2 + px + 1 = 1 - x^2 - y^2 = 0$이므로 이 점은 근(root)이다. 따라서 단위원 전체가 자취에 포함된다.

$y = 0$, $p = -(x^2 + 1)/x$인 경우. $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대해 이 p는 실수이고, x는 $x^2 + px + 1 = 0$의 근이다. $0^2 + p \cdot 0 + 1 = 1$이므로 점 $x = 0$은 결코 근이 아니다.

따라서 근의 자취는 원점을 뺀 실수축과 단위원 $|z| = 1$을 합한 것이다. (점 ± 1은 두 부분 모두에 놓인다.)

두 번째 방정식 $pz^2 + z + 1 = 0$

$z = x + \mathrm{i}y$로 놓으면 실수부와 허수부에서

$$p(x^2 - y^2) + x + 1 = 0, \qquad (2px + 1)y = 0.$$

$z = 0$이면 $1 = 0$이 되므로 원점은 결코 근이 아니다.

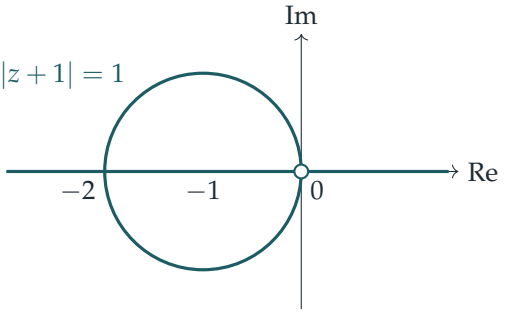
$y = 0$인 경우. 그러면 $x \neq 0$이고 $px^2 + x + 1 = 0$이므로 $p = -(x + 1)/x^2$이다. 이 값은 $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대해 실수이므로, 원점을 제외한 실수축의 모든 점이 자취에 포함된다. ($x = -1$일 때는 $p = 0$이 되고, 방정식은 일차방정식 $z + 1 = 0$이 되는데, 그 근은 실제로 -1이다.)

$2px + 1 = 0$인 경우. 그러면 $x \neq 0$이고 $p = -1/(2x)$이다. 실수부 방정식에 대입하고 $-2x$를 곱하면

$$(x^2 - y^2) - 2x^2 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + 1)^2 + y^2 = 1.$$

역으로, 이 원 위에서 원점이 아닌 임의의 점에 대해 $x \neq 0$이므로 $p = -1/(2x)$는 실수이고, 위 과정을 거꾸로 따라가면 두 방정식이 모두 성립함을 알 수 있다.

따라서 근의 자취는 실수축과 원 $|z + 1| = 1$(중심 -1, 반지름 1)을 합한 것에서, 두 부분 모두에 놓인 원점을 뺀 것이다.



속이 빈 원은 빠진 점 $z=0$을 나타낸다.

생각해 보기 이 자취는 왜 첫 번째 자취를 안팎으로 뒤집은 것처럼 보일까?

z가 $pz^2+z+1=0$의 근이면 $w=1/z$는 $w^2+w+p=0$을 만족한다. 사상 $z\mapsto 1/z$는 (0을 뺀) 실수축을 자기 자신으로 보내고, $w^2+w+p=0$의 허근들이 놓이는 직선 $\operatorname{Re} w=-\frac{1}{2}$를 원점을 지나는 원 $|z+1|=1$로 보낸다. 원점이 빠지는 것은 원점이 $w=\infty$에 대응하기 때문이다.

세 번째 방정식 $pz^2+p^2z+2=0$

$p=0$이면 방정식은 $2=0$이 되어 근이 없으므로, 이후로는 줄곧 $p\neq 0$이다. 실수부와 허수부에서

$$p(x^2-y^2)+p^2x+2=0, \qquad p(2x+p)y=0,$$

을 얻고, $p\neq 0$이므로 두 번째 식은 $(2x+p)y=0$이 된다.

$p=-2x$인 경우. $p\neq 0$이므로 $x\neq 0$이다. 대입하면

$$-2x(x^2-y^2)+4x^3+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x(x^2+y^2)=-1.$$

역으로, 이 곡선 위의 임의의 점은 $x\neq 0$이므로 $p=-2x$는 0이 아닌 실수이고, 과정을 거꾸로 따라가면 그 점이 근임을 알 수 있다. $x^2+y^2>0$이므로 이 곡선에서는 $x<0$이다. 곡선을

$$y^2=-\frac{1}{x}-x^2,$$

로 쓰면 $-1/x\geq x^2$이어야 한다. $x<0$을 곱하면 부등호 방향이 바뀌어 $-1\leq x^3$이 되므로 $-1\leq x<0$이다. 곡선은 -1을 지나고(이때 $y=0$), 실수축에 대해 대칭이며, $x\to 0^-$일 때 $y^2\to\infty$이므로 허수축이 점근선(asymptote)이다. 또한 $x<0$에서 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x=x^{-2}-2x>0$이므로, x가 -1에서 0으로 갈 때 $|y|$는 꾸준히 증가한다. 극형식(polar form)으로 나타내면 이 곡선은 $r^3\cos\theta=-1$이다.

$y=0$인 경우. 이제 실수 x가 자취에 속하는 것은 $xp^2+x^2p+2=0$을 만족하는 실수 p가 존재할 때이다. $x=0$이면 이 식은 $2=0$이므로 0은 자취에 속하지 않는다. $x\neq 0$이면 이 식은 p에 대한 이차식(quadratic)이고, 판별식(discriminant)이 음이 아닐 때, 그리고 그때에만 실근을 갖는다.

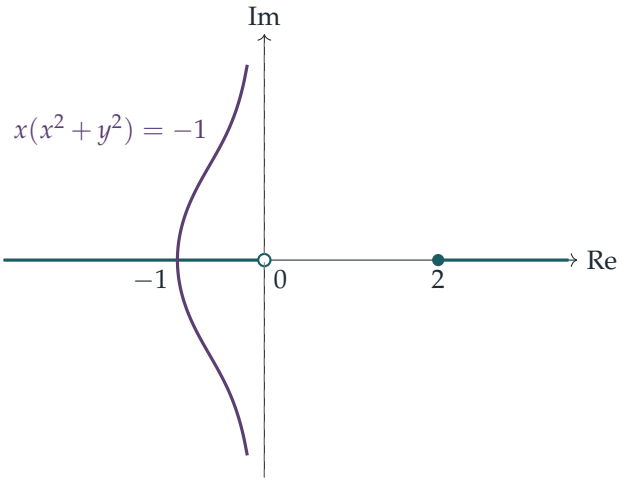
$$x^4-8x=x(x^3-8)\geq 0.$$

이 부등식은 $x<0$일 때(두 인수가 모두 음수)나 $x\geq 2$일 때(두 인수가 모두 음이 아님) 성립하고, $0<x<2$에서는 성립하지 않는다. 이렇게 구한 실수 p는 자동으로 0이 아니다. $p=0$이면 $2=0$이 되기 때문이다. 예를 들어 $x=2$이면 $2p^2+4p+2=0$이어야 하므로 $p=-1$이고, 실제로 $-z^2+z+2=-(z-2)(z+1)$이다.

생각해 보기 여기서는 왜 x가 아니라 p에 대해 풀까?

우리가 알고 싶은 것은 어떤 점 x에 도달할 수 있는가이므로, x가 주어지고 p가 미지수이다. 방정식은 p에 대한 이차식이고, 실근의 존재는 정확히 x에 대한 판별식 조건이다.

따라서 근의 자취는 음의 실수축, 실수축의 반직선(ray) $x \geq 2$, 그리고 -1에서 출발하여 위아래 양쪽으로 허수축을 향해 뻗어 나가는 곡선 $x(x^2+y^2) = -1$로 이루어진다.



이 곡선은 실수축과 -1에서만 만나고 그곳에서 수직인 접선(tangent)을 가지며, $|y| \to \infty$일 때 허수축에 가까워진다.

검산

- $z^2 + pz + 1 = 0$에서 두 근의 곱은 1이므로, 허근은 $|z|^2 = 1$인 켤레(conjugate) 복소수 $z, \bar{z}$이다. 다시 단위원이 나온다.
- 세 번째 방정식에서 $p = -1$이면 근은 2와 -1로, 각각 반직선의 끝점과 곡선의 꼭짓점이다. $p = 1$로 놓으면 $z^2 + z + 2 = 0$이 되어 근은 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$이고, $x(x^2+y^2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$로 예상대로이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 10^5개의 p 값에 대해 세 방정식을 모두 풀어 모든 근이 제시된 자취 위에 놓임을 확인하였다. 또한 각 자취의 무작위 점들이 제시된 p로 실제로 얻어짐을 확인하였고, p를 촘촘히 훑어본 결과 세 번째 방정식은 $(0, 2)$에서 실근을 갖지 않았으며 가장 작은 양의 실근은 2.0이었다.

흔한 실수

- 역(converse)을 확인하는 것을 잊는 실수: p를 소거하면 자취를 **포함하는** 곡선을 얻을 뿐이며, 각 점이 실제로 어떤 실수 p에서 얻어지는지 여전히 보여야 한다. 세 번째 방정식에서 $(0,2)$의 실수 점들은 $y=0$을 만족하지만 결코 얻어지지 않는다.
- x나 p가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나누는 실수. 빠진 원점은 바로 여기에서 생긴다.
- $p=0$을 부주의하게 다루는 실수: 두 번째 방정식에서는 $p=0$이 진짜 근 -1을 주지만, 세 번째 방정식에서는 근을 전혀 주지 않는다.

STEP 너머

근궤적(root locus)은 제어공학(control engineering)의 표준 도구이다. 이득(gain) 매개변수가 변함에 따라 시스템의 극점(pole)들이 곡선을 따라 움직이고, 안정성(stability)은 극점들이 오른쪽 반평면으로 넘어가는지에 달려 있다. 이 문제는 또한 직선과 원을 직선과 원으로 보내는 사상 $z \mapsto 1/z$의 기하학을 암시한다. 이것이 뫼비우스 변환(Möbius transformation) 이론의 출발점이며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 아름답게 그려져 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.