풀이

STEP III 2012, 문제 5

순수수학 • 이차곡선 위의 유리점

> **STEP III 2012, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q5

핵심 아이디어

(i)(b)의 항등식(identity)은 사실 회전(rotation)을 감추고 있다. 점 $(\cos\theta+\sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta-\sqrt{m}\cos\theta)$는 점 $(1,-\sqrt{m})$을 각 θ만큼 회전시켜 얻는 점이므로, 반지름이 $\sqrt{1+m}$인 원 위에 그대로 머문다. $\cos\theta$와 $\sin\theta$가 둘 다 유리수이면 (예를 들어 (i)(a)에서 얻은 $\frac{3}{5}$와 $\frac{4}{5}$처럼) 이 회전은 하나의 "좋은" 점을 또 다른 "좋은" 점으로 옮긴다. (ii)의 모든 내용은 적당한 정수점에서 출발하여 같은 요령을 쓰는 것이고, 쌍곡선(hyperbola)의 경우에는 회전 대신 그 쌍곡선판 친척을 쓴다.

풀이

소문항 (i)

(a) 점 $(1,0)$은 $x^2+y^2=1$ 위의 정수 유리점(integer rational point)이다. 정수가 아닌 유리점을 얻으려면 세 변이 $3,4,5$인 직각삼각형을 이용한다. $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9+16}{25}=1$이므로 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$가 조건을 만족하고, 두 좌표 모두 정수가 아니다.

(b) 점 $(1,1)$은 $x^2+y^2=2$ 위의 정수 유리점이다.

전개하면 교차항(cross terms)은 $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$와 $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$이고 서로 상쇄되므로

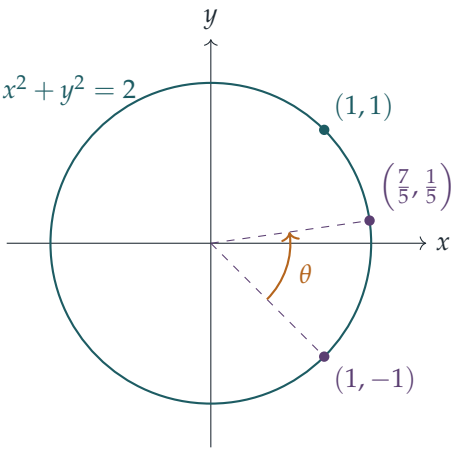
$$\begin{aligned}(\cos\theta+\sqrt{m}\sin\theta)^2+(\sin\theta-\sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta+m\sin^2\theta+\sin^2\theta+m\cos^2\theta\\ &= (1+m)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1+m.\end{aligned}$$

이다. $m=1$로 두면 우변은 2가 되고, $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$인 θ를 고른다. ($\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$가 단위

원(unit circle) 위에 있으므로 이런 θ가 존재한다.) 그러면

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

는 $x^2 + y^2 = 2$를 만족한다. 실제로 $\frac{49+1}{25} = 2$이다. 따라서 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$는 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 정수가 아닌 유리점이다.



그림은 무슨 일이 일어났는지 보여 준다. $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$인 θ만큼 $(1, -1)$을 시계 반대 방향으로 회전시키면 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$에 도달한다.

소문항 (ii)

(a) $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$이므로 점 $(1, \sqrt{2})$, 즉 $p = 1, q = 0, r = 0, s = 1$인 점은 $x^2 + y^2 = 3$ 위의 정수 2-유리점이다.

정수가 아닌 점을 얻으려면 (i)(b)의 항등식에서 $m = 2$로 두어 $1 + m = 3$이 되게 하고, 다시 $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$를 쓴다.

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

여기서 $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{4}{5}$, $r = \frac{4}{5}$, $s = -\frac{3}{5}$이고 어느 것도 정수가 아니며, 항등식에 의해 $x^2 + y^2 = 3$이다. 직접 확인해 보면 $x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$, $y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$이고, 둘을 더하면 $\frac{75}{25} = 3$이다.

> **생각해 보기** 항등식은 $1 + m$만 만들어 내고 m에는 $\sqrt{2}$가 들어가야 하는데, 어떻게 11에 도달할 수 있을까?

출발점의 크기를 바꾸면 된다. 항등식은 $(1, -\sqrt{m})$을 회전시켜 얻은 것인데, 임의의 점 $(a, -b\sqrt{2})$를 회전시켜도 마찬가지이다. 교차항이 똑같이 상쇄되어

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

를 얻는다. 따라서 $a^2+2b^2=11$인 정수가 필요하고, $a=3$, $b=1$이 조건을 만족한다($9+2=11$). 다시 말해 $x^2+y^2=11$ 위의 정수 2-유리점 $(3,\sqrt{2})$에서 출발하는 것이다.

(b) $a=3, b=1, \cos\theta=\frac{3}{5}, \sin\theta=\frac{4}{5}$로 두면

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

이다. 따라서 $p=\frac{9}{5}$, $q=\frac{4}{5}$, $r=\frac{12}{5}$, $s=-\frac{3}{5}$이고 어느 것도 정수가 아니며 $x^2+y^2=11$이다. 직접 계산하면 $x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$, $y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$이고, 둘을 더하면 $\frac{275}{25}=11$이다.

(c) 쌍곡선의 경우에는 x^2+y^2 대신 x^2-y^2를 보존하는 "회전"이 필요하다. $c^2-s^2=1$이면 ($c=\cosh t, s=\sinh t$를 떠올리자)

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2 &= a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\ &= (a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

이다. 교차항 $2\sqrt{2}\,abcs$가 이번에도 상쇄되기 때문이다. $a^2-2b^2=7$이 필요하므로 $a=3$, $b=1$로 둔다. (따라서 $(3,\sqrt{2})$는 이 쌍곡선 위의 정수 2-유리점이다.)

이제 $c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$인 유리수 c, s가 필요하다. $c+s=2$, $c-s=\frac{1}{2}$로 고르면 $c=\frac{5}{4}$, $s=\frac{3}{4}$이다. 그러면

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2}, \qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

이고 $p=\frac{15}{4}$, $q=\frac{3}{4}$, $r=\frac{9}{4}$, $s=\frac{5}{4}$이며 어느 것도 정수가 아니다. 직접 계산하면 $x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$, $y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$이므로 $x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$이다. 이것이 $x^2-y^2=7$ 위의 정수가 아닌 2-유리점이다.

검산

모든 점은 위에서 한 것처럼 분수로 정확하게 확인할 수 있고, 수치로도 확인할 수 있다. (ii)(c)에서는 $x\approx 4.81066$, $y\approx 4.01777$이므로 $x^2-y^2\approx 7.0000$이고, (ii)(b)에서는 $x\approx 2.93137$, $y\approx 1.55147$이므로 $x^2+y^2\approx 11.0000$이다. 마지막에는 항상 p, q, r, s를 훑어보며 어느 것도 정수가 아님을 확인하자.

흔한 실수

- 0도 정수라는 사실을 잊는 것. $\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\dots\right)$ 같은 점은 $p=0$이므로 정수가 아닌 2-유리점이 아니다.
- (c)에서 무난해 보이는 선택이 실패할 수 있다. $c=\frac{5}{3}$, $s=\frac{4}{3}$도 $c^2-s^2=1$을 만족하지만 $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{2}$가 되어 $p=5$가 정수이다. 모든 계수를 확인하자.

STEP 너머

$p + q\sqrt{2}$ 꼴의 수들은 체(field) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$를 이루며, 이 문제는 사실 그 체 위에서 원뿔곡선(conic) 위의 점을 찾는 문제이다. 알고 있는 점을 유리수 각만큼 회전시키는 요령은 아름다운 이론의 출발점이다. 원뿔곡선이 유리점을 하나 가지면 그 점을 지나는 직선들로 나머지 유리점을 모두 매개화(parametrise)할 수 있고, $x^2 - 2y^2 = 1$(펠 방정식(Pell's equation)) 위의 유리점들은 바로 (c)에서 쓴 쌍곡선 "회전"에 대해 군(group)을 이룬다. 데이븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 펠 방정식과 제곱수의 합을 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 같은 체를 소개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.