풀이

STEP III 2012, 문제 4

순수수학 • 무한급수의 합

> **STEP III 2012, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q4

핵심 아이디어

모든 것은 두 개의 표준적인 급수(series) $\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$와 $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$에 바탕을 둔다. 소문항 (i)의 요령은 n에 대한 각 다항식을 $n!$과 약분되도록 쓰는 것이다. 즉 n의 거듭제곱 대신 $n(n-1)$이나 $n(n-1)(n-2)$ 같은 곱을 사용한다. 소문항 (ii)에서는 부분분수(partial fractions)를 이용해 다루기 까다로운 유리식 인수를 $1/(n+k)$ 꼴의 조각들로 나누며, 그 각각은 첨자를 이동한 로그 급수가 된다.

풀이

소문항 (i)

두 가지 사실이 모든 일을 해 준다. 첫째, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

둘째, 임의의 자연수 $k \geq 1$에 대하여 항 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$은 $n < k$일 때 0이 되고, $n \geq k$일 때 $1/(n-k)!$과 같다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

여기에 나오는 급수는 모두 절대수렴(converge absolutely)한다(각각 n에 대한 다항식을 $n!$으로 나눈 꼴이다). 그러므로 급수를 자유롭게 나누고 다시 합쳐도 된다.

첫 번째 합. $n+1 = n+1$이므로, $k=1$일 때의 $(*)$를 이용하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \mathrm{e} + (\mathrm{e}-1) = 2\mathrm{e}-1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 합. $(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n-1)+3n+1$로 쓴다. 그러면 $k=2$와 $k=1$일 때의 $(*)$에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \mathrm{e} + 3\mathrm{e} + (\mathrm{e}-1) = 5\mathrm{e}-1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

세 번째 합.

> **?** **생각해 보기** $(2n-1)^3$을 하강 곱 $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$, n으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

전개하면 $(2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$이다. 다음으로

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n, \qquad n^2 = n(n-1) + n.$$

을 이용한다. 이 식들은 우변을 전개하거나 $n = 0, 1, 2, 3$을 대입하여 확인할 수 있다. 대입하면

$$\begin{aligned}(2n-1)^3 &= 8[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] - 12[n(n-1)+n] + 6n - 1 \\ &= 8\,n(n-1)(n-2) + 12\,n(n-1) + 2n - 1.\end{aligned}$$

(간단한 확인: $n=1$일 때 양변은 모두 1이고, $n=2$일 때 양변은 모두 27이다.) 이제 $k = 3, 2, 1$일 때의 $(*)$에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{n!} = 8\mathrm{e} + 12\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 21\mathrm{e} + 1.$$

소문항 (ii)

부분분수. 분자와 분모의 차수가 같으므로 먼저 나눗셈을 한다.

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n+1} + \dfrac{B}{n+2}$로 놓으면, 커버업 규칙(cover-up rule)에 의해 $A = \dfrac{-2}{1} = -2$($n=-1$에서)이고 $B = \dfrac{-5}{-1} = 5$($n=-2$에서)이다. 따라서

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{2}{n+1} - \frac{5}{n+2}.$$

세 조각. $x=\frac{1}{2}$로 놓고, $|x|<1$에서 성립하는 $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{\infty} x^m/m$을 이용한다. 아래의 세 급수는 각각 수렴하므로(항이 적어도 2^{-n}만큼 빠르게 줄어든다), 합을 나누는 것은 정당하다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = 2\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = 4(\ln 2-\tfrac{1}{2}) = 4\ln 2-2.$$

둘째 줄과 셋째 줄에서는 각각 $m=n+1$, $m=n+2$로 놓았다. 셋째 줄은 전체 로그 급수에서 $m=1$인 항 x를 뺀 것이다.

? **생각해 보기** 세 번째 조각에는 왜 $-x$가 추가로 필요할까?

$m=n+2$로 첨자를 이동하면 합이 $m=2$부터 시작하므로, 이 급수는 첫째 항이 빠진 $-\ln(1-x)$이다. 이것을 잊어버리는 것이 여기서 틀리기 가장 쉬운 부분이다.

합치기.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)} = 2+2(2\ln 2)-5(4\ln 2-2) = 12-16\ln 2.$$

검산

- $n=60$까지의 부분합(partial sums)을 구하면 (i)의 세 합에 대하여 4.436564, 12.591409, 58.083918을 얻는다. 이 값들은 기계 정밀도 수준에서 $2e-1$, $5e-1$, $21e+1$과 일치한다.
- (ii)에서 $12-16\ln 2 \approx 0.909645$이며, 이는 부분합과 일치한다. 처음 몇 항은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{48}$, $\frac{1}{16}$이므로, 전체 합이 1보다 조금 작다는 것은 그럴듯하다.
- (ii)의 답은 양수여야 하며, 실제로 그렇다: $16\ln 2 \approx 11.09 < 12$.

흔한 실수

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$를 사용하는 것. 이는 $n=0$인 항이 빠져 있다는 사실을 잊은 것이다.
- $\sum n^2/n!$을 $\sum n/(n-1)!$로 쓰고 거기서 멈추는 것. 여전히 $n=(n-1)+1$로 나누어야 한다.
- (ii)에서 $\sum x^n/(n+2)$의 첨자를 이동할 때 $-x$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

하강 곱 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$을 하강 계승(falling factorial)이라 하며, 다항식을 하강 계승으로 나타내는 데에는 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)가 쓰인다. $(*)$의 합은 평균이 1인 푸아송 분포(Poisson distribution)의 k차 계승 모멘트(factorial moment)가 1이라는 것을 말해 준다. 예를 들어 $\sum n^k/n!$이 k번째 벨 수(Bell number)의 e배가 되는 이유가 바로 이것이다. 여기서 한 재배열은 절대수렴에 의해 정당화되는데, 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*를 참고하라. 확률 쪽으로는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.