풀이

STEP III 2012, 문제 3

순수수학 • 접하는 곡선과 사차식

STEP III 2012, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q3

핵심 아이디어

$y = 4 - x^2$를 두 번째 식에 대입하면 x에 대한 사차방정식(quartic)을 얻고, 그 근은 두 곡선이 만나는 점들의 x좌표이다. "접한다"는 것은 **중근**(repeated root)을 뜻한다. m과 k를 미지수로 다루는 대신, 모든 것을 접점의 x좌표 a로 나타내자. 그러면 m, k와 나머지 교점들이 모두 a의 간단한 함수가 된다. 이로부터 네 그림 각각이 어떤 모양이어야 하는지 정확히 알 수 있고, 소문항 (ii)는 $m = 12$인 특수한 경우이다.

풀이

준비: 두 곡선은 어디서 접할 수 있는가?

두 곡선을 $C_1 : y = 4 - x^2$, $C_2 : mx = k - y^2$라 하자. C_1은 $(\pm 2, 0)$과 $(0, 4)$를 지나는, 아래로 열린 익숙한 포물선(parabola)이다. C_2는 $x = (k - y^2)/m$이다. 이는 x축에 대하여 대칭이고 ($m > 0$이므로) 왼쪽으로 열리며 꼭짓점이 $(k/m, 0)$인 포물선이다. $k > 0$이면 y축과 $(0, \pm\sqrt{k})$에서 만나고, $k < 0$이면 전혀 만나지 않는다.

C_1 위의 모든 점은 $(x, 4 - x^2)$ 꼴이므로, 이 점이 C_2 위에 있을 필요충분조건은

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

이다. 여기서 $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$을 이용하였다.

? **생각해 보기** 왜 "접한다"는 것이 F가 중근을 가진다는 뜻인가?

공통점에서 C_1의 방향벡터는 $(1, -2x)$이고, C_2($mx + y^2$의 등위곡선(level curve))의 법선벡터(normal)는 $(m, 2y)$이다. 두 곡선이 접하는 것은 방향벡터가 법선벡터와 수직일 때, 즉

$m - 4xy = 0$, 다시 말해 $m - 4x(4 - x^2) = 0$일 때이다. 그런데 $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$은 바로 이 식이다. 따라서 두 곡선이 $x = a$에서 접할 필요충분조건은 $F(a) = F'(a) = 0$, 즉 중근을 가지는 것이다.

$F'(a) = 0$에서 $m = 4a(4 - a^2)$를 얻는다. 이를 $F(a) = 0$에 대입하면

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

이고, 따라서

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

$m > 0$이므로 $0 < a < 2$ 또는 $a < -2$이어야 한다. 이중 인수를 묶어 내면

$$F(x) = (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8),$$

이며, 이는 전개하여 확인할 수 있다. x^3 항은 소거되고, x^2의 계수는 $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$, x의 계수는 $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$, 상수항은 $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$이다. 이차 인수의 판별식(discriminant)은 $8(4 - a^2)$이므로, 다른 교점은 $0 < a < 2$일 때에만 존재한다. 그 위치는

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

이제 네 경우를 a로 분류할 수 있다.

- $k < 0$일 필요충분조건은 $a^2 > 4$, 따라서 $a < -2$이다.
- $0 < a < 2$일 때 $k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$이므로, $k > 16$일 필요충분조건은 $a < \sqrt{8/3}$이다.
- $0 < a < 2$일 때 $\frac{k}{m} < 2$일 필요충분조건은 $3a^2 - 8a + 4 < 0$, 즉 $(3a - 2)(a - 2) < 0$, 즉 $a > \frac{2}{3}$이다.

따라서 (a)는 $a < -2$, (c)는 $0 < a < \frac{2}{3}$, (d)는 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$, (b)는 $\sqrt{8/3} < a < 2$인 경우이다. ($0 < k < 16$이고 $k/m > 2$인 접하는 배치는 존재하지 않으며, 이 때문에 그 경우는 목록에 없다.)

소문항 (i)

모든 경우에 C_1이 좌표축과 만나는 점은 $(\pm 2, 0)$과 $(0, 4)$이고, C_2가 좌표축과 만나는 점은 $(k/m, 0)$, 그리고 $k > 0$일 때 $(0, \pm\sqrt{k})$이다.

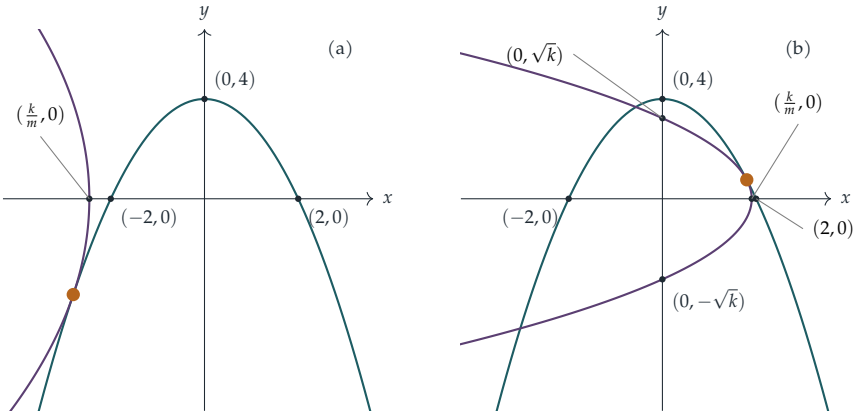
(a) 여기서는 $a < -2$이므로 두 곡선은 제3사분면의 $(a, 4 - a^2)$에서 접하고, 그 밖의 곳에서는 만나지 않는다. 꼭짓점은 $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$에 있으며, $(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$이므로 이 값은 -2보다 작다. 따라서 C_2는 전체가 $(-2, 0)$의 왼쪽에 놓이고, 아래쪽 가지가 C_1의 왼쪽 가지에 맞닿는다.

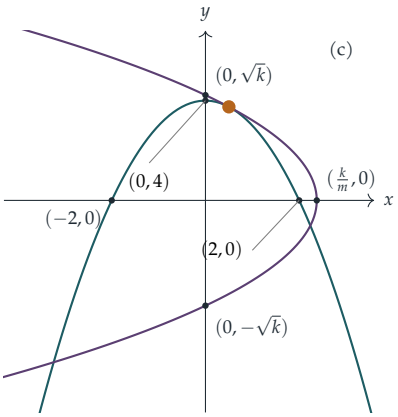
(b) 이제 $\sqrt{8/3} < a < 2$이므로 접점은 제1사분면에서 $(2,0)$ 가까이에 있다. 꼭짓점은 $\sqrt{3} \le k/m < 2$를 만족하고(산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $3a^2+4 \ge 4\sqrt{3}\,a$), $\sqrt{k} < 4$이므로, C_2의 꼭짓점과 두 y절편은 모두 C_1 아래에 있다. 위쪽 가지는 아래에서 C_1에 접한 뒤 x_+에서 이 곡선과 교차하는데, 여기서 $-2 < x_+ < 0$이다(제2사분면의 점). 아래쪽 가지는 제3사분면의 $x_- < -2$에서 C_1과 교차한다.

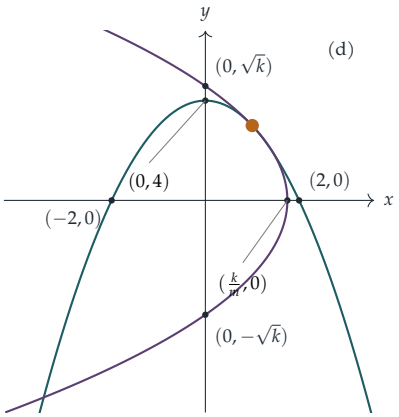
(c) 여기서는 $0 < a < \frac{2}{3}$이다. 꼭짓점은 $(2,0)$의 오른쪽에 있고 $\sqrt{k} > 4$이므로, C_2는 C_1의 위쪽을 감싸며 제1사분면에서 바깥쪽으로부터 접한다. 또한 $\sqrt{8-2a^2} > 2+a \iff (3a-2)(a+2) < 0$이므로 $x_+ > 2$이고, $x_- < -2$이다. 따라서 아래쪽 가지는 제4사분면에서 C_1과 교차하고, 제3사분면에서 다시 교차한다.

(d) 여기서는 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$이다. 꼭짓점은 0과 2 사이에서 C_1 아래에 있지만 $\sqrt{k} > 4$이므로, 위쪽 가지는 $(0,4)$ 위를 지난다. 위쪽 가지는 제1사분면에서 C_1에 접하고, 같은 사분면의 $x_+ \in (0,2)$에서 교차하기도 한다($x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$이므로). 아래쪽 가지는 $x_- < -2$에서 교차한다.

$0 < a < 2$이면 모든 경우에 $x_- < -2$인데, $a + \sqrt{8-2a^2} > 2$이기 때문이다($\sqrt{8-2a^2} > 2-a$의 양변을 제곱하면 된다). 그림은 각각 $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$을 사용하였다. C_1은 청록색, C_2는 자주색, 접점은 호박색이다.







소문항 (ii)

$m = 12$일 때 $y = 4 - x^2$를 $12x = k - y^2$에 대입하면 $12x = k - 16 + 8x^2 - x^4$, 즉

$$x^4 - 8x^2 + 12x + 16 - k = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

접점 $x = a$에서 이 사차식은 중근을 가지므로(위의 상자 참고) 그 도함수(derivative)도 그 곳에서 0이 된다.

$$4a^3 - 16a + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^3 - 4a + 3 = 0.$$

$a = 1$이 근이므로 $a^3 - 4a + 3 = (a-1)(a^2 + a - 3)$이고, 따라서

$$a = 1 \qquad \text{또는} \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

k를 구하기 위해 사차식에 $x = a$를 대입하고, $a^3 = 4a - 3$, 따라서 $a^4 = 4a^2 - 3a$임을 이용하여 정리하면

$$k = a^4 - 8a^2 + 12a + 16 = (4a^2 - 3a) - 8a^2 + 12a + 16 = -4a^2 + 9a + 16.$$

이제 세 경우를 살펴보자.

- $a = 1$: $k = 21$이므로 $k > 16$이고 $k/m = \frac{7}{4} < 2$이다. 이는 경우 **(d)**이다.
- $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}) \approx 1.303$: 이때 $a^2 = 3 - a$이므로 $k = -4(3-a) + 9a + 16 = 13a + 4 = \frac{1}{2}(13\sqrt{13} - 5) \approx 20.94$이다. $13\sqrt{13} > 37$이므로(제곱하면 $2197 > 1369$) 이 값은 16보다 크고, $13\sqrt{13} < 53$이므로($2197 < 2809$) 24보다 작다. 따라서 $k > 16$이고 $k/m < 2$이며, 이것도 경우 **(d)**이다.
- $a = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}) \approx -2.303$: $k = 13a + 4 = -\frac{1}{2}(5 + 13\sqrt{13}) \approx -25.94 < 0$이다. 이는 경우 **(a)**이다.

따라서 그림 (a)와 (d)만 나타난다. 이는 위에서 a로 한 분류와 일치한다. 1과 1.303은 $(\frac{2}{3}, \sqrt{8/3}) \approx (0.667, 1.633)$에 속하고, $-2.303 < -2$이다. $a^3 - 4a + 3 = 0$은 $m = 4a(4 - a^2)$에 $m = 12$를 대입한 것일 뿐임에 주목하자.

두 (d) 그림은 조금 다르다. $a = 1$일 때 다른 교점은 $x = -1 \pm \sqrt{6}$이다. $x \approx 1.45$에서의 교차는 접점의 **오른쪽**에 있고, 위쪽 가지는 위에서 C_1에 접한다(그림과 같이). $a \approx 1.303$일 때 교차는 $x \approx 0.84$에서 일어나 접점의 왼쪽에 있으며, 위쪽 가지는 아래에서 접한다.

검산

- $m = 12$, $k = 21$일 때 사차식은 $(x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$로 인수분해된다. 전개하면 $x^4 - 8x^2 + 12x - 5$이고, 이는 $16 - k = -5$인 사차식이다.
- $(1, 3)$에서 C_1의 기울기는 -2이고, $12x = 21 - y^2$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -6/y = -2$이다. 따라서 두 곡선은 실제로 그곳에서 접한다.
- 수치적으로, $(0, 2)$와 $a < -2$에서 무작위로 고른 a에 대해 공식 $m = 4a(4 - a^2)$와 $k = (4 - a^2)(3a^2 + 4)$는 $F(a)$와 $F'(a)$를 0으로 만들고, 경우의 경계는 $a = \frac{2}{3}$과 $a = \sqrt{8/3}$에서 나타난다. $a \approx 1.3028$일 때 근을 탐색하면 다른 교점이 $x \approx 0.8433$과 $x \approx -3.4488$에서 발견되며, 이는 $x_\pm$가 예측한 대로이다.

흔한 실수

- 사차식의 근이 하나뿐이어야 한다고 요구하는 것. "정확히 한 번 접한다"는 것은 다른 교차점을 허용한다. $m = 12$인 경우 (d)에서는 교차점이 두 개 있다.
- C_2를 오른쪽으로 열리게 그리는 것. $m > 0$이면 $|y|$가 커질수록 $x = (k - y^2)/m$은 감소한다.
- (a)에서 C_2가 y절편을 갖지 않는다는 것을 잊거나, 꼭짓점을 -2와 0 사이에 두는 것. 꼭짓점은 -2의 왼쪽에 있어야 한다.

STEP 너머

배치를 접점 a로 나타내는 것은 **판별식**과 **포락선**(envelope)을 처음 엿보는 일이다. F가 중근을 가지게 하는 (m, k)의 집합은 곡선 $\big(4a(4 - a^2), (4 - a^2)(3a^2 + 4)\big)$이며, 이 곡선을 가로지르면 실수 교점의 개수가 두 개씩 바뀐다. 이것이 평면곡선의 대수기하학(algebraic geometry)의 시작이며, 매개변수에 따라 해가 어떻게 변하는지 연구하는 특이점("파국") 이론(singularity theory, catastrophe theory)의 시작이기도 하다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 같은 정신의 STEP 스타일 곡선 문제가 훨

씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.