풀이

STEP III 2012, 문제 2

순수수학 • 무한곱과 급수

> **STEP III 2012, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q2

핵심 아이디어

(i)의 곱은 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면 괄호가 하나씩 차례로 합쳐지므로, 연쇄적으로 소거되어(telescoping) 아주 간단한 식이 된다. 일단 $\frac{1}{1-x}$를 무한곱(infinite product)으로 나타내면, 로그(logarithm)를 취해 곱을 합으로 바꿀 수 있고, 그 합을 항별로 미분(differentiating term by term)하면 분수들의 급수(series)를 얻는다. (ii)는 같은 기법이 모습만 바꾼 것이다. $1+x+x^2$는 $1-t$ 꼴의 두 식의 몫이므로, (i)의 결과를 각각에 적용할 수 있다.

풀이

풀이 전체에서 $|x|<1$이고, 문제에서 허용한 대로 수렴(convergence)은 신경 쓰지 않는다.

소문항 (i)

매번 $(1-a)(1+a)=1-a^2$를 이용하여 왼쪽부터 괄호를 합친다.

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

이런 식으로 계속된다. 각 단계마다 지수가 두 배가 되고, 마지막 괄호 $1+x^{2^n}$은 $1-x^{2^n}$을 $1-x^{2^{n+1}}$로 바꾼다. 따라서

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

$x \neq 1$이므로 $1-x$로 나눌 수 있다.

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

이를 정리하면 $\frac{1}{1-x}$에 대한 구하는 식이 된다.

이제 $n \to \infty$로 보낸다. $|x| < 1$이므로 $x^{2^{n+1}} \to 0$이고, 따라서 나머지 항은 사라져서

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2^r}).$$

모든 인수가 양수이고($x^{2^r} > -1$이므로) $1-x$도 양수이므로 로그를 취할 수 있다. 곱의 로그는 로그들의 합이다.

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty}\ln(1+x^{2^r}),$$

양변에 -1을 곱하면 구하는 결과가 된다.

생각해 보기 로그들의 합에서 분수들의 합으로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

양변을 x에 대하여 미분한다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\ln(1+x^{2^r})$의 도함수는

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}}.$$

좌변에서는 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x}$이다. 항별로 미분하면(무시하라고 한 수렴 문제가 바로 이것이다)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

이고, 여기에 쓴 항들은 $r = 0, 1, 2$에 해당한다. 이것이 구하는 급수이다.

소문항 (ii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$이므로 좌변은 $\ln(1+x+x^2)$의 도함수이다. 따라서 $1+x+x^2$에 대한 로그의 합을 찾으면 되는데, 인수분해(factorisation) $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$가 그것을 준다.

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x).$$

$|x^3| < 1$이기도 하므로, (i)의 로그에 관한 결과는 x를 x^3으로 바꾸어도 성립한다. $y_r = x^{2^r}$로 놓으면 $(x^3)^{2^r} = y_r^3$이므로

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln(1+y_r^3) + \sum_{r=0}^{\infty}\ln(1+y_r) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\frac{1+y_r^3}{1+y_r}.$$

세제곱의 합(sum of cubes)은 $1+y^3=(1+y)(1-y+y^2)$로 인수분해되므로 각 분수는 $1-y_r+y_r^2$이고

$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{r=0}^{\infty}\ln(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}).$$

(모든 $1-y+y^2=(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$는 양수이므로 이 로그들은 의미가 있다.)

생각해 보기 미분할 때 마이너스 부호는 어디로 가는가?

연쇄 법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}})=\frac{-2^rx^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}=-\frac{2^rx^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

이고, 이 마이너스 부호가 합 앞의 마이너스 부호를 상쇄한다. 양변을 항별로 미분하면

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^rx^{2^r-1}(1-2x^{2^r})}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

처음 세 항은

$$\begin{aligned}r=0:&\quad\frac{1-2x}{1-x+x^2},\\ r=1:&\quad\frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4}=\frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\ r=2:&\quad\frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8}=\frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8},\end{aligned}$$

이며, 이것이 바로 증명하라고 한 급수이다.

다른 방법. 항등식 $(1+y+y^2)(1-y+y^2)=1+y^2+y^4$를 이용하면 (i)에서와 똑같이 $1+x+x^2$에 대한 연쇄 소거 곱을 직접 얻는다. 즉 $1+x+x^2=(1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}})/\prod_{r=0}^{n}(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}})$이고, 분자는 1로 수렴한다.

검산

- $x=0$을 대입하면 각 급수의 양변이 모두 1이다.
- $x=\frac{1}{2}$에서 (ii)의 좌변은 $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$이다. 우변의 처음 네 항의 합은 1.142369이고, 거듭제곱 x^{2^r}이 매우 빠르게 작아지므로 오차도 매우 빠르게 줄어든다.
- 연쇄 소거된 곱은 분수를 써서 정확하게 확인했고, 두 급수와 로그 항등식은 $(-0.95, 0.95)$에서 무작위로 고른 1000개의 x에 대해 30개의 항을 사용하여 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 연쇄 법칙에서 인수를 빠뜨리는 것: x^{2^r}의 도함수는 $2^r x^{2^r}$이 아니라 $2^r x^{2^r-1}$이다.
- (ii)에서 전체 부호를 틀리는 것: $1-y+y^2$의 도함수는 $-1+2y$이고, 바로 이 마이너스가 합 앞의 마이너스를 상쇄한다.

STEP 너머

곱 $\prod(1+x^{2^r})$은 모든 양의 정수를 서로 다른 2의 거듭제곱들의 합으로 나타내는 방법이 정확히 한 가지라는 것을 말해 주는데, 이는 이진법(binary notation)을 생성함수(generating function)로 표현한 것이다. "수렴을 무시한다"는 말 뒤에는 진짜 질문들이 숨어 있다. 언제 무한곱에 로그를 취할 수 있고, 언제 급수를 항별로 미분할 수 있는가? 해석학(analysis) 첫 강좌에서는 이 질문들에 균등수렴(uniform convergence)으로 답하며, $|x| \leq c < 1$에서는 여기 나온 모든 것이 균등수렴한다. 명쾌한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.