풀이

STEP III 2012, 문제 11

역학 • 접힌 채 떨어지는 밧줄

> **STEP III 2012, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q11

핵심 아이디어

모든 것은 고리의 기하학적 구조에서 나온다. 입자가 x만큼 떨어졌을 때 정지해 있는 쪽과 움직이는 쪽의 길이를 알면, 각 직선 부분의 질량중심(centre of mass)을 이용하여 잃은 위치 에너지(potential energy)를 적을 수 있고, 얻은 운동 에너지(kinetic energy)도 적을 수 있다(속력을 가지는 것은 입자와 움직이는 쪽뿐이다). 그러면 에너지 보존(energy conservation)으로부터 v^2를 x의 함수로 얻고, $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이므로 가속도(acceleration)는 $\frac{1}{2}v^2$를 x에 대하여 미분하여 얻는다.

풀이

모형과 기하학적 구조

밧줄은 단위 길이당 질량(mass per unit length)이

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

인 균일하고 늘어나지 않으며(inextensible) 완전히 유연한 선으로, 입자는 질점(point mass)으로 다루고, 고리 아래쪽의 굽은 부분의 크기는 무시할 수 있다고 본다. 깊이는 P에서 아래쪽으로 잰다.

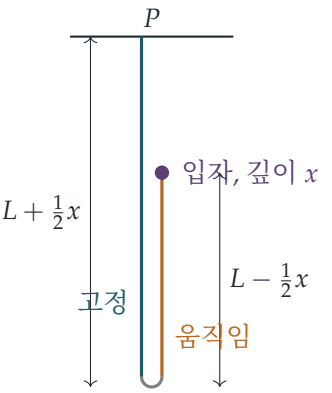
입자가 거리 x만큼 떨어졌을 때, 밧줄은 고리의 맨 아래(깊이를 d라 하자)에서 이어진 두 개의 연직 부분으로 이루어진다.

- **고정된** 부분: P에서 맨 아래까지이며, 정지해 있고 길이는 d이다.
- **움직이는** 부분: 입자(깊이 x)에서 맨 아래까지이며, 길이는 $d - x$이다.

전체 길이가 $2L$이므로 $d + (d - x) = 2L$이고, 따라서

$$d = L + \tfrac{1}{2}x, \qquad \text{움직이는 부분의 길이} = L - \tfrac{1}{2}x.$$

이다. (처음에는 $x = 0$이고 두 부분의 길이는 모두 L이다.)



잃은 위치 에너지

각 직선 부분은 균일하므로 질량중심은 그 중점에 있다. 깊이가 h인 질량 μ의 위치 에너지는 $-\mu g h$이다. 계 전체에 대한 질량 $\times$ 깊이의 합을 $D(x)$라 쓰면

$$\begin{aligned} D(x) &= mx + \rho d \cdot \frac{d}{2} + \rho(d - x) \cdot \frac{x + d}{2} \\ &= mx + \frac{\rho}{2}(2d^2 - x^2) \\ &= mx + \rho\Big(L^2 + Lx + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\Big) = mx + \rho\Big(L^2 + Lx - \tfrac{1}{4}x^2\Big). \end{aligned}$$

이다. 처음에는 $D(0) = \rho L^2$이므로, $\rho L = M$을 이용하면 잃은 위치 에너지는

$$g\big(D(x) - D(0)\big) = gx\Big(m + \rho L - \tfrac{1}{4}\rho x\Big) = \frac{gx}{L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

이다.

얻은 운동 에너지

고정된 부분은 정지해 있다. 입자와 움직이는 부분의 모든 점은 (가정하라고 주어진 대로) 속력 v를 가지므로, 움직이는 질량은 $m + \rho\big(L - \tfrac{1}{2}x\big)$이고

$$\text{운동 에너지} = \tfrac{1}{2}\Big(m + M - \frac{Mx}{2L}\Big)v^2 = \frac{1}{2L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2.$$

이다. 계는 정지 상태에서 출발하므로, 에너지 보존에 의해 운동 에너지 = 잃은 위치 에너지이다.

$$\frac{1}{2L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2 = \frac{gx}{L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

즉,

$$v^2 = \frac{2gx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. $x < 2L$이면 $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$이므로 $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$이고, 따라서 분모는 결코 0이 되지 않는다.

가속도

간단히 하기 위해

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

라 쓰면 $\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$이고, (x에 대하여 미분하면) $A' = -\frac{1}{4}M$, $B' = -\frac{1}{2}M$이다.

? **생각해 보기** x의 함수로 주어진 v^2에서 가속도를 어떻게 얻을 수 있을까?

연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고, 이것이 가속도이다. 이는 입자가 아래로 움직이는 동안, 즉 x가 t에 따라 증가하는 동안 성립한다.

곱의 미분법(product rule)과 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

이다. 핵심이 되는 간단한 정리는 $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$라는 것이며, 따라서 첫 번째 분수는 정확히 1이다. 그러므로

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

가속도가 g보다 크다

놓은 뒤에는 $0 < x < 2L$이다. 그러면

- 앞에서 보였듯이 $B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$이므로 $B^2 > 0$이다.
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$이다.
- $M > 0, g > 0, x > 0$이다.

따라서 추가된 항 $\frac{MgxA}{2B^2}$는 순양수이고, $0 < x < 2L$인 모든 x에 대하여 가속도는 g보다 순전히 크다. (놓는 순간에는 $x = 0$이고 가속도는 정확히 g이다.)

검산

- $M = 0$(가벼운 밧줄)이면 두 공식 모두 자유 낙하(free fall)로 돌아간다. 즉 $v^2 = 2gx$이고 가속도는 g이다.
- $m = 0.3$, $M = L = 1$, $x = 1$, $g = 9.8$로 두면 $A = 1.05$, $B = 0.8$이므로 $v^2 = 25.725$이고, 가속도는 $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 g보다 훨씬 크다. 이 점에서 $\frac{1}{2}v^2$를 수치적으로 미분하면 같은 값을 얻고, 정지 상태에서부터 운동 방정식을 단계적으로 진행시키면 v^2 공식이 그대로 재현된다.
- 단위: mL, ML, Mx는 모두 질량 $\times$ 길이의 단위를 가지므로 분수들은 무차원(dimensionless)이고, v^2는 gx의 단위를 가진다.

흔한 실수

- 움직이는 부분의 길이를 잘못 구하는 것: 떨어지는 쪽이 끌어들인 밧줄이 양쪽에 나뉘므로, 고리의 맨 아래는 x가 아니라 $\frac{1}{2}x$만큼 내려간다.
- 고정된 부분에 운동 에너지를 주거나, 고정된 부분의 위치 에너지도 변한다는 것(길어지므로 질량중심이 내려간다)을 잊는 것.
- $\frac{1}{2}v^2$ 대신 v^2를 미분하여 가속도의 두 배를 얻는 것.

STEP 너머

이것은 고전적인 "접힌 사슬의 낙하" 문제로, 운동하는 질량이 시간에 따라 변하는 계이다. 여기서 사용한 에너지 보존 모형은 끝부분이 g보다 빠르게 가속된다고 예측하며, $m = 0$이면 $x \to 2L$일 때 속력이 한없이 커지는데, 이것이 채찍이 딱 소리를 내는 원리이다. 굽은 부분에서 에너지가 실제로 보존되는지는 연구 문헌에서 논쟁이 되어 왔으며, 실제 사슬로 한 실험에서는 여기서처럼 g보다 큰 가속도가 관찰된다. 가변 질량계(variable-mass system)와, 에너지와 운동량(momentum) 중 무엇을 쓸지 신중하게 판단하는 방법은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.