풀이

STEP III 2012, 문제 10

역학 • 원운동

STEP III 2012, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

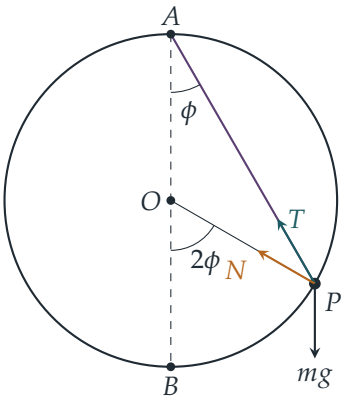
step.maths.org/questions/12-s3-q10

핵심 아이디어

모든 것은 원형 고리(hoop)의 중심, 원형 고리의 꼭대기, 작은 고리(ring)가 이루는 이등변 삼각형(isosceles triangle)의 기하로 귀결된다. 줄의 길이가 $2a\cos\phi$이고 작은 고리를 지나는 반지름이 연직 아래 방향과 각 2ϕ를 이룬다는 것만 알아차리면, 이 문제는 에너지 방정식 하나(λ와 속력을 구하는 데)와 반지름 방향 운동방정식(radial equation of motion) 하나(수직항력을 구하는 데)로 풀린다.

풀이

작은 고리를 매끄러운 원 위를 움직이는 질점(particle)으로, 줄을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 원형 고리의 중심을 O, 가장 높은 점을 A, 가장 낮은 점을 B, 작은 고리를 P라 하고, $c = \cos\phi$로 둔다.



기하

삼각형 OAP에서 $OA = OP = a$이므로 이 삼각형은 이등변삼각형이고, A와 P에서의 각은 모두 ϕ이다. 따라서

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

그러므로 P는 O보다 $a\cos 2\phi$만큼 아래에 있고, B보다는 $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$만큼 위에 있다. 줄이 팽팽할 때 줄이 늘어난 길이(extension)는 $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$이고, 줄은 $2c - 1 = 0$일 때, 즉 $\phi = \frac{\pi}{3}$에서 느슨해진다.

탄성 계수

원형 고리는 매끄럽고 수직항력(reaction)은 운동 방향에 수직이므로 역학적 에너지가 보존된다(conservation of mechanical energy). $B(\phi = 0)$에서 작은 고리는 정지해 있고 늘어난 길이는 a이므로, 탄성 에너지는 $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$이다. $\phi = \frac{\pi}{3}$에서 작은 고리는 다시 정지하고, 줄은 막 느슨해졌으며(탄성 에너지가 없다), 높이는 $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$만큼 올라갔다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

속력

줄이 팽팽한 상태에서 일반적인 각 ϕ에 대해, B에서부터의 에너지 보존으로부터

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi \\ &= \tfrac{3}{2}mga[1-(2c-1)^2] - 2mga(1-c^2) \\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2 \\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

을 얻으므로

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

이 값은 $c = 1$과 $c = \frac{1}{2}$에서 0이 되고 그 사이에서는 양수이다. 이는 작은 고리가 $\phi = -\frac{\pi}{3}$과 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 사이를 오가는 것과 들어맞는다. 정지한 뒤 작은 고리는 B를 지나 반대쪽의 대칭인 점까지 미끄러져 되돌아가고, 이를 반복한다. 운동하는 내내 $\frac{1}{2} \le c \le 1$이고 줄은 팽팽하며(양 끝점에서만 막 느슨해진다), 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

수직항력

그림처럼 수직항력의 O 방향 성분을 N이라 하자(음수로 나올 수도 있다). 중심을 향하는 PO 방향으로 힘을 분해한다.

- 장력은 PA를 따라 작용하고, PA는 PO와 각 ϕ(이등변삼각형의 밑각)를 이루므로, O 방향으로 $T\cos\phi$를 준다.
- OP는 연직 아래 방향과 각 2ϕ를 이루므로, 무게는 O에서 **멀어지는** 방향으로 성분 $mg\cos 2\phi$를 가진다.

> **생각해 보기** 여기서 왜 무게의 성분이 안쪽이 아니라 바깥쪽을 향하는가?

$\phi < \frac{\pi}{4}$이면 작은 고리는 O보다 아래에 있고 중력은 작은 고리를 중심에서 멀어지게 당긴다. P가 O의 높이를 지날 때 $\cos 2\phi$의 부호가 바뀌므로, (O 방향의) 하나의 식 $-mg\cos 2\phi$로 두 경우를 모두 다룰 수 있다.

중심 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 쓰면

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

T, mv^2/a와 $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$을 대입하면

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

따라서 수직항력의 크기는

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

이고, 이는 괄호 안의 값이 결코 음수가 되지 않는다면 요구된 결과이다. 이제 이를 보인다. (음의 부호는 원형 고리가 운동 내내 작은 고리를 O에서 멀어지는 **바깥쪽으로** 민다는 것을 알려 준다.)

R는 결코 0이 되지 않는다

이차식 $12c^2 - 15c + 5$의 판별식(discriminant)은 $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$이고 최고차항의 계수가 양수이므로, 모든 실수 c에 대해 이 식은 순양수이다. 완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

이므로 운동 내내 $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$이고, 최솟값은 $\cos\phi = \frac{5}{8}$일 때이다(이 값은 $[\frac{1}{2}, 1]$에 속하므로 실제로 도달된다).

검산

- $B(c=1)$에서: 작은 고리는 정지해 있고, 위쪽으로 $T=3mg$, 아래쪽으로 무게 mg가 작용하므로, 원형 고리는 아래로 $2mg$만큼 밀어야 한다. 공식은 $(12-15+5)mg=2mg$를 준다.
- 줄이 느슨해지는 점$(c=\frac{1}{2})$에서: 장력도 속력도 없고, P는 O보다 $\frac{a}{2}$만큼 위에 있으므로, 반지름 방향 수직항력은 안쪽을 향하는 무게의 성분 $mg\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}mg$와 평형을 이룬다. 공식은 $(3-7.5+5)mg=\frac{1}{2}mg$를 준다.
- 운동방정식을 수치적으로 적분하였다(B에서 살짝 벗어난 곳에서 출발하는 RK4). 작은 고리는 B에서 각 $2.094\approx\frac{2\pi}{3}$인 곳에서 멈추고, 계산된 수직항력은 공식과 10^{-7} 이내로 일치하며, 그 최솟값은 $0.3125\,mg=\frac{5}{16}mg$이다.

흔한 실수

- 작은 고리의 각 위치를 2ϕ가 아니라 ϕ로 잡는 실수. 원주각은 중심각의 절반이다.
- 훅의 법칙이나 탄성 에너지에서 늘어난 길이 $2a\cos\phi-a$ 대신 줄의 전체 길이 $2a\cos\phi$를 쓰는 실수.
- 수직항력이 안쪽을 향한다고 가정한 뒤 음수 답이 나와 당황하는 것. 문제는 그 크기만을 묻는다.

STEP 너머

작은 고리는 자유도(degree of freedom)가 하나이며, 이런 계를 다루는 가장 깔끔한 방법은 하나의 좌표로 나타낸 에너지(또는 라그랑지안(Lagrangian)) 정식화를 쓰고, R 같은 구속력(constraint force)은 나중에 뉴턴의 법칙으로 되찾는 것이다. 운동방정식은 에너지에서, 구속력은 힘의 분해에서 얻는 이러한 역할 분담은 대학 1학년 역학 강의에서 철사 위의 구슬을 다루는 방식 그대로이다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 구속 조건이 있는 원운동과 에너지 방법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.