풀이

STEP III 2012, 문제 1

순수수학 • 비선형 미분방정식

STEP III 2012, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q1

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 2계(second order)이고 비선형(non-linear)이므로 정해진 풀이법이 없다. 요령은 n을 잘 고르면 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 속의 괄호를 각 방정식의 좌변과 일치시킬 수 있다는 점이다. 그러면 방정식은 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$가 곧바로 적분할 수 있는 식과 같다는 뜻이 되고, 이로부터 변수분리(separation of variables)가 가능한 1계 방정식을 얻는다.

풀이

예비 결과

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$로 쓰자. 곱의 미분법(product rule)을 쓰고, y^n과 $(y')^2$에는 연쇄법칙(chain rule)을 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'(n(y')^2 + 2yy''),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i)

좌변은 $(y')^2 + 2yy''$이고, 이는 $n = 1$일 때의 괄호이다. 따라서 $z = y(y')^2$으로 놓는다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'((y')^2 + 2yy'') = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

적분하면 $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$이다. $x = 0$에서 $y = 1, y' = 0$이므로 $0 = \frac{2}{3} + C$이고

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}(y^{3/2} - 1). \qquad (*)$$

> **생각해 보기** $(*)$는 $(y')^2$만 알려 준다. 제곱근의 부호는 어느 쪽을 택해야 하며, (양변을 모두 0으로 만드는) $y \equiv 1$도 가능한가?

상수함수 $y \equiv 1$은 원래 방정식의 해가 **아니다**. 대입하면 $0 = 1$이 되기 때문이다. 실제로 방정식에 $x = 0$을 대입하면 $0 + 2y''(0) = 1$이므로 $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$이다. 따라서 y는 $x = 0$에서 극소이고, 충분히 작은 $x > 0$에 대해 $y' > 0$이다. 또한 방정식은 $x \mapsto -x$에 대해 변하지 않으므로 해는 우함수(even function)이고, $x > 0, y' > 0, y > 1$인 범위에서 다루면 된다.

$(*)$에 y를 곱하고 양의 제곱근을 취한 뒤 변수를 분리하면

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2} - 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

$w = y^{3/2} - 1$로 치환하면 $\mathrm{d}w = \frac{3}{2}y^{1/2}\,\mathrm{d}y$이다. 좌변은 $\frac{2}{3}w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$가 되고, ($w = 0$인) $x = 0$부터 적분하면

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{w} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{2}{3}\,x^2 = \tfrac{3}{8}x^2.$$

따라서 $y^{3/2} = \frac{3}{8}x^2 + 1$이고, 우함수이므로 $x < 0$에서도 성립한다. 그러므로

$$y = (\tfrac{3}{8}x^2 + 1)^{2/3},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

직접 검산해 보자. $u = \frac{3}{8}x^2 + 1$이라 하면 $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3}\cdot\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}xu^{-1/3}$이므로 $y(y')^2 = u^{2/3}\cdot\frac{1}{4}x^2u^{-2/3} = \frac{1}{4}x^2$이다. 한편 $\frac{2}{3}(y^{3/2} - 1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{4}x^2$이므로 $(*)$가 성립한다.

소문항 (ii)

이번에는 좌변이 $(y')^2 - yy''$이다. $n(y')^2 + 2yy''$이 이것의 상수배가 되어야 하므로 $n : 2 = 1 : -1$, 즉 $n = -2$이다. $z = y^{-2}(y')^2$으로 놓으면(y는 1 근처에 있으므로 0이 아니어서 문제없다)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-3}y'(-2(y')^2 + 2yy'') = -2y^{-3}y'((y')^2 - yy'') = -2y^{-3}y'\,(-y^2) = \frac{2y'}{y},$$

이다. 여기서 방정식을 $(y')^2 - yy'' = -y^2$의 꼴로 사용하였다. 적분하면 $z = 2\ln y + C$이고, $x = 0$을 대입하면 $0 = 0 + C$이다. 따라서

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 2\ln y.$$

$v = \ln y$로 놓으면 $v' = y'/y$이고, 방정식은 $v(0) = 0$인 $(v')^2 = 2v$가 된다.

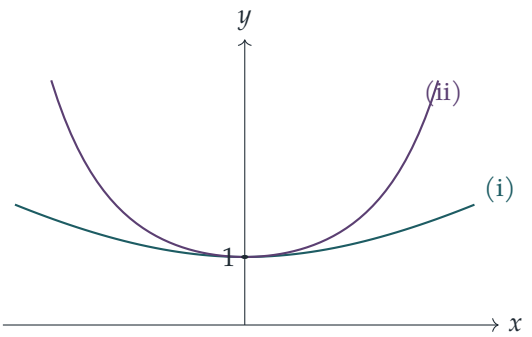
소문항 (i)에서와 마찬가지로 $v \equiv 0$(즉 $y \equiv 1$)은 이 1계 방정식의 해이지만 원래 방정식의 해는 아니다. 대입하면 $1 = 0$이 되기 때문이다. $x = 0$에서 원래 방정식은 $0 - y''(0) + 1 = 0$을 주므로 $y''(0) = 1 > 0$이다. 방정식은 이번에도 $x \mapsto -x$에 대해 변하지 않으므로 $v' > 0$인 $x > 0$에서 생각한다. 그러면

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2v} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

이고, 우함수이므로 모든 x에서 성립한다. 따라서

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

검산: $y' = xy$, $y'' = (1 + x^2)y$이므로 $(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2(x^2 - 1 - x^2 + 1) = 0$이다. 또한 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$이다.



검산

- 두 해 모두 우함수이고, $y''(0)$의 값이 예측하듯 $x = 0$에서 최솟값 1을 가진다.
- 소문항 (ii)에는 더 빠른 방법이 있다. $y = \mathrm{e}^v$를 방정식에 바로 대입하면 $y' = v'\mathrm{e}^v$, $y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$이고, 모든 항이 약분되어 $v'' = 1$만 남는다. 따라서 곧바로 $v = \frac{1}{2}x^2$이다.
- 수치적으로 확인하면, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$에서 출발하여 (i)을 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $y(2) \approx 1.842016$이 나오고, 이는 $(\frac{5}{2})^{2/3}$과 일치한다. (ii)에 대해서는 $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$이 나온다.

흔한 실수

- z의 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 것. 소문항 (i)에서는 초기 조건 때문에 적분상수가 0이 아니다: $C = -\frac{2}{3}$.

- 소문항 (ii)에서 유추하여 $n = 1$을 고르는 것. $(y')^2$과 yy''의 계수의 비가 맞아야 하므로 반드시 $n = -2$이다.
- 1계 방정식에서 얻은 $y \equiv 1$을 원래 방정식에 대입해 확인하지 않고 해로 받아들이는 것.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 2계 방정식에 대한 **적분인자**(integrating factor)이다. $(y')^2 + 2yy''$에 y'을 곱하면 완전한 도함수(exact derivative)가 되는데, 이는 $\ddot{x} = -\omega^2 x$에 $\dot{x}$를 곱하면 에너지 보존(conservation of energy)을 얻는 것과 같은 원리이다. 이 문제의 방정식들처럼 x가 명시적으로 나타나지 않는 방정식은 $p = y'$을 y의 함수로 보면 언제나 1계로 낮출 수 있다. $y \equiv 1$에 대한 고민은 해의 비유일성(non-uniqueness)을 엿보게 해 준다. $v' = \sqrt{2v}$는 $v = 0$에서 립시츠 조건(Lipschitz condition)을 만족하지 않는다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 계수 내림법(reduction of order)과 존재성·유일성 정리(existence and uniqueness theorem)를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.