풀이

STEP II 2012, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP II 2012, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

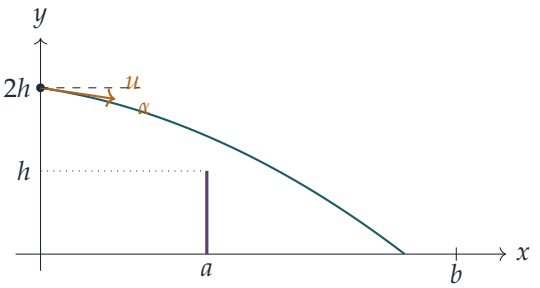
step.maths.org/questions/12-s2-q9

핵심 아이디어

공의 높이를 발사 지점으로부터의 수평 거리 x의 함수로 나타낸다. 이것이 궤적 방정식(trajectory equation)이다. 그러면 "네트를 넘어간다"는 $x = a$에서의 부등식 하나가 되고, "b보다 앞에 떨어진다"는 비행 시간(time of flight)에 대한 부등식이 된다. 마지막 부분이 풀리는 까닭은 두 조건이 모두 같은 양 $1/u^2$에 대한 경계, 즉 하나는 위로부터의 경계(상계, upper bound)이고 다른 하나는 아래로부터의 경계(하계, lower bound)로 드러나기 때문이다. 따라서 하계가 상계보다 작아야 하고, u는 사라진다.

풀이

공기 저항(air resistance)과 회전을 무시하고, 공을 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자(particle)로 모형화하며, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$이다. 원점을 발사 지점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 네트를 향하는 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다.



네트 넘기기

처음 속도의 성분은 수평 방향으로 $u\cos\alpha$, 아래쪽으로 $u\sin\alpha$이다. 시간 t가 지난 뒤

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(u\cos\alpha)$를 대입하여 소거하면 궤적은 다음과 같다.

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

수평 속도는 일정한 양수이므로 공은 $x = a$에 정확히 한 번 도달하고, 그곳에서 $y > h$일 때 네트를 넘는다.

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

양수 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$를 곱하면

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

b보다 앞에 떨어지기

공은 $2h$만큼 떨어졌을 때, 즉 $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$일 때 땅에 닿는다. t에 대한 이 이차방정식(quadratic)의 두 근은 부호가 서로 반대이고(두 근의 곱이 $-4h/g < 0$이다), 착지 시간은 양수인 근이다.

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

공이 수평 거리 b보다 앞에 떨어질 필요충분조건은 $uT\cos\alpha < b$, 즉 $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$이다($u\cos\alpha > 0$이므로). g를 곱하고 $u\sin\alpha$를 더하면

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

이것이 두 번째 결과이다.

마지막 부등식

생각해 보기 u가 들어 있는 두 조건에서 어떻게 u가 없는 조건이 나올 수 있을까?

첫 번째 결과는 $1/u^2$의 상계이다. 두 번째 결과를 $1/u^2$의 하계로 바꿀 수 있다면, u가 무엇이든 하계는 상계보다 작아야 한다.

두 번째 부등식의 양변은 모두 양수이므로(우변은 $\sin\alpha \geq 0$이고 $\cos\alpha > 0$이기 때문이다), 제곱해도 부등식이 유지된다.

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ 항이 소거되어 $2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$가 남는다. 즉

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

첫 번째 결과와 합치면

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

양의 인수 $2/(g\sec^2\alpha)$를 약분하고 양변에 $a^2b^2 > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff \quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff \quad & ab(b - a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

? 생각해 보기 $b - a$로 나눌 수 있을까?

나눌 수 있으며, 부호가 중요하다. 공은 $x = a$에서 여전히 높이 $h > 0$보다 위에 있으므로 a보다 먼 곳에 떨어지고, 또 b보다 앞에 떨어진다. 따라서 $b > a$이므로 $ab(b - a) > 0$이고, 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b - a)}.$$

검산

- 단위: $a\tan\alpha$는 h와 같이 길이이고, ga^2/u^2도 길이이다. 따라서 $1/u^2$에 대한 각 경계의 단위는 $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$이며, 마땅히 그래야 한다.
- $\alpha = 0$이면 최종 결과는 $b^2 > 2a^2$이다. 실제로 수평으로 발사된 공은 $x = a$까지 h보다 적게 떨어진다. 떨어진 거리는 x^2에 비례하므로 $x = \sqrt{2}\,a$까지는 $2h$보다 적게 떨어지고, 따라서 공은 $\sqrt{2}\,a$보다 먼 곳에 떨어지며 $b > \sqrt{2}\,a$이다.
- 수치적으로 $g = 9.8$, $u = 12$, $\alpha = 0.2$, $h = 1.5$로 놓고 운동을 단계별로 계산하면 착지 거리가 6.7759로 나와 $uT\cos\alpha$와 일치한다. 20 000개의 무작위 경우에서 처음 두 부등식은 "네트를 넘는다"와 "b보다 앞에 떨어진다"와 정확히 일치했고, 두 조건이 모두 성립할 때마다 마지막 부등식도 성립했다.

흔한 실수

- 처음 속도의 연직 성분을 $+u\sin\alpha$로 잡는 것: 공은 수평선 **아래쪽**으로 발사된다.
- 양변이 양수인지 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것.
- $b-a$가 왜 양수인지 밝히지 않고 $b-a$로 나누는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 부등식들 사이에서 매개변수를 소거하는 작은 예이다. L과 U에 u가 들어 있지 않을 때, 연립부등식 $L < 1/u^2 < U$가 해를 가질 필요충분조건은 $L < U$이다. 같은 아이디어를 여러 개의 일차부등식에 대해 체계적으로 적용한 것이 푸리에–모츠킨 소거법(Fourier–Motzkin elimination)이며, 이는 선형계획법(linear programming)의 기초 가운데 하나이다. 궤적이 더 이상 포물선이 아닌, 공기 저항이 있는 포물체 운동을 포함한 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.