풀이

STEP II 2012, 문제 8

순수수학 • 비선형 점화식

> **STEP II 2012, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q8

핵심 아이디어

점화식(recurrence) $u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$는 비선형(non-linear)이지만 **모든** n에 대하여 성립한다. 따라서 연속한 두 n의 값에 대해 식을 써서 빼면 다루기 까다로운 상수 q^2가 사라진다. 남는 식은 비 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$이 결코 변하지 않는다는 것을 말해 주며, 이로써 수열은 상수 계수 p를 갖는 **선형** 점화식으로 바뀐다. 처음의 부등식(inequality)은 정확히 $p > 2$라는 명제이며, 이것이 수열을 증가하게 만드는 원동력이다.

풀이

부등식

모든 항을 공통분모 $\alpha\beta$로 통분하면

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

$\beta - \alpha > q > 0$이므로 (양변이 모두 양수이므로) 제곱하면 $(\beta - \alpha)^2 > q^2$이고, 따라서 분자는 양수이다. $\alpha, \beta > 0$이므로 분모 $\alpha\beta$도 양수이다. 그러므로 주어진 식은 양수이고, 이것이 증명하려던 것이다.

첫 번째 항등식

점화식의 양변에 u_{n-1}을 곱하면, 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

n 대신 $n+1$을 대입하면 ($n+1 \geq 1$이므로 여전히 가능하다)

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 q^2가 사라진다.

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

이를 정리하면 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{즉,} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

선형 점화식

생각해 보기 방금 증명한 항등식(identity)에는 서로 다른 네 개의 항이 들어 있다. 이로부터 어떻게 하나의 상수 p를 갖는 점화식을 얻을 수 있을까?

수열의 어떤 항도 0이 아니므로 항등식을 $u_n u_{n+1}$로 나눌 수 있다.

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

따라서 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$은 모든 $n \geq 1$에 대하여 $v_{n+1} = v_n$을 만족한다. 즉, 이 값은 상수이다. 이 공통의 값을 p라 하면 $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$, 즉

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

p를 구하기 위해 $n = 1$을 이용한다. 점화식으로부터 $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$이므로

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

이것은 첫 부분의 식과 같으므로, $\beta - \alpha > q$일 때 $p > 2$임을 이미 알고 있다.

$\beta > \alpha + q$일 때 수열은 증가한다

$d_n = u_{n+1} - u_n$이라 하자. 선형 점화식을 $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$의 꼴로 쓰면

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

생각해 보기 $p - 2 > 0$임은 알지만, $(p-2)u_n$이 왜 양수여야 할까? 아직 $u_n > 0$임은 알지 못한다.

양수임과 증가함은 수학적 귀납법(induction)으로 함께 증명해야 한다. 주장: 모든 $n \geq 1$에 대하여 $u_n > 0$이고 $d_{n-1} > 0$이다.

$n = 1$일 때: $u_1 = \beta > 0$이고 $d_0 = \beta - \alpha > q > 0$이다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $u_n > 0$이고 $d_{n-1} > 0$이라고 가정하자. 그러면 $p > 2$이므로

$$d_n = d_{n-1} + (p-2)u_n > 0, \qquad u_{n+1} = u_n + d_n > 0,$$

이고, 이것은 $n+1$에 대한 주장이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대하여 $d_n = u_{n+1} - u_n > 0$이므로 수열은 순증가(strictly increasing)한다. (사실 차이 자체도 증가하므로, 증가 속도는 선형보다 빠르다. 모든 항이 양수이므로, 이 경우 어떤 항도 0이 아니라는 조건은 저절로 성립한다.)

$\beta = \alpha + q$인 경우

이제 $(\beta - \alpha)^2 - q^2 = 0$이므로 정확히 $p = 2$이고 $d_n - d_{n-1} = 0$이다. 차이는 모두 $d_0 = \beta - \alpha = q$와 같으므로, 수열은 등차수열(arithmetic progression)

$$u_n = \alpha + nq.$$

이다. $q > 0$이므로 여전히 순증가하지만, 이제는 선형으로만 증가한다. 직접 확인해 보면 $(\alpha + (n+1)q)(\alpha + (n-1)q) = (\alpha + nq)^2 - q^2$이므로, 이 수열은 실제로 원래의 점화식을 만족한다.

검산

- $\alpha = 1, \beta = 4, q = 2$로 잡자 (따라서 $\beta > \alpha + q$). 점화식으로부터 $1, 4, 12, 35, \frac{407}{4}, \ldots$를 얻고, $p = \frac{1+16-4}{4} = \frac{13}{4}$이다. 실제로 $\frac{13}{4} \cdot 4 - 1 = 12$이고 $\frac{13}{4} \cdot 12 - 4 = 35$이다.
- $\alpha = 1, q = 2, \beta = 3$이면 항은 $1, 3, 5, 7, \ldots$로, 마지막 부분의 등차수열이다.
- 수백 개의 무작위 α, β, q에 대하여 두 항등식을 정확한 유리수 연산으로 확인하였고, $\beta > \alpha + q$일 때마다 수열이 증가함을 확인하였다.

흔한 실수

- $u_n > 0$임을 먼저 알지 못한 채 $p > 2$로부터 $d_n > d_{n-1}$이라고 결론짓는 것. 두 사실은 같은 귀납법 안에 들어가야 한다.
- $u_n u_{n+1}$이 0이 아님을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것.
- 빼는 단계에서 첨자 $n+1$에서의 점화식을 사용하며, 이를 위해 $n+1 \geq 1$이 필요하다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

몰래 선형 점화식을 만족하는 비선형 점화식은 숨은 **불변량**(invariant)을 갖는다고 한다. 여기서는 $(u_{n+1}+u_{n-1})/u_n$, 또는 동치로 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$가 불변량이며, 이는 역학에서 보존량의 이산적인 유사물이다. 선형 점화식 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$의 해는 $\lambda + \lambda^{-1} = p$인 $u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$이다. 이것은 $p > 2$일 때 실수이고 지수적으로 증가하며, 중근인 경우 $p = 2$에서는 $A + Bn$이 되어, 정확히 위의 이분법과 일치한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 STEP 형식의 점화식이 더 실려 있고, 미분방정식과의 유사성은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 전개된다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.