풀이

STEP II 2012, 문제 7

순수수학 • 벡터와 원

STEP II 2012, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

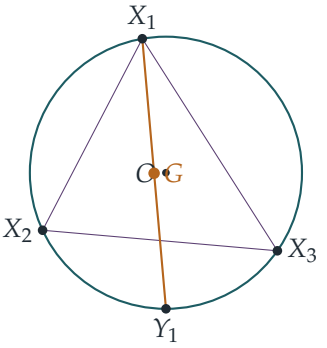
step.maths.org/questions/12-s2-q7

핵심 아이디어

점 Y_1은 X_1과 G를 지나는 직선 위에 있으므로, 그 위치벡터(position vector)는 미지의 스칼라 하나를 포함하는 $\mathbf{x}_1$과 $\mathbf{g}$의 간단한 결합으로 나타난다. Y_1에 대해 그 밖에 아는 사실은 단위원(unit circle) 위에 있다는 것 하나뿐이므로, $|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$에서 λ_1에 대한 방정식을 얻는다. 이것은 이차방정식(quadratic equation)이지만, 근(root) 하나는 미리 알 수 있다. 직선은 X_1 자체에서 원과 만나므로 그 근을 인수로 묶어 낼 수 있다.

풀이

$\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$, $\lambda = \lambda_1$로 놓는다. 각 $\mathbf{x}_i$는 단위벡터(unit vector)이므로 $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$이다.



Y_1의 위치벡터

$\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$에서 $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$를 얻으므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$를 썼다. 이것이 구하는 식이다.

λ_1 구하기

Y_1은 원 위에 있으므로 $|\mathbf{y}_1|^2 = 1$이고, 따라서 $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$이다. 다음이 필요하다.

$$|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2 = 1 + 2\alpha + 1 = 2 + 2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3) = \beta + \gamma.$$

그러므로 $|3\mathbf{y}_1|^2$을 자기 자신과의 내적(dot product)으로 전개하면

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

을 얻는다. λ의 거듭제곱끼리 모으고 2로 나누면

$$(3+\alpha-2\beta-2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)\lambda - (3-\alpha-\beta-\gamma) = 0.$$

이다. 식을 깔끔하게 하기 위해

$$A = 3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad B = 3-\alpha-\beta-\gamma,$$

로 놓으면, 가운데 계수(coefficient)가 정확히 $A-B$임을 알 수 있다. 따라서 방정식은 $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$이고, 다음과 같이 인수분해(factorise)된다.

$$(\lambda+1)(A\lambda - B) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 $\lambda = -1$이 근이어야 하며, 왜 이 근을 버릴 수 있는가?

$\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$에 $\lambda = -1$을 대입하면 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$이다. X_1과 G를 지나는 직선 위의 모든 점은 $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ 꼴이고, 이 직선은 Y_1뿐만 아니라 X_1에서도 원과 만나므로, 이차방정식은 처음부터 $\lambda = -1$을 근으로 가질 수밖에 없었다. 문제에서 $\lambda_1 > 0$이라 했으므로 $\lambda_1 \neq -1$이고, 따라서 $A\lambda_1 = B$이다.

이제 A로 나누어도 되는지 확인하는 일이 남았다. $A = 0$이면 $A\lambda_1 = B$에서 $B = 0$이어야 한다. 그런데

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2 = 3 + 2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{따라서} \qquad B = \tfrac{1}{2}(9 - |\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|^2) = \tfrac{9}{2}(1 - |\mathbf{g}|^2).$$

이다. 삼각 부등식(triangle inequality)에 의해 $|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|\le 3$이고, 등호는 세 단위벡터가 모두 같을 때만 성립한다. 세 점은 서로 다르므로 $B>0$이다. 그러므로 $A\neq 0$이고

$$\lambda_1=\frac{B}{A}=\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

이므로 증명이 끝났다.

마지막 부분

$\lambda_1>0$이고 $\overrightarrow{GY_1}=-\lambda_1\overrightarrow{GX_1}$이므로 길이 사이에 $GY_1=\lambda_1 GX_1$이 성립하고, 따라서

$$\frac{GX_1}{GY_1}=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

이다. 첨자를 순환시켜($1\to 2\to 3\to 1$, 이때 $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$가 된다) 같은 논증을 적용하면 나머지 두 비를 얻는다. 분모 $B=3-\alpha-\beta-\gamma$는 대칭(symmetric)이므로 세 비에서 모두 같고, 분자는

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma,\qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha,\qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

이다. 이들을 더하면 $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma)=9-3(\alpha+\beta+\gamma)=3B$이다. 그러므로

$$\frac{GX_1}{GY_1}+\frac{GX_2}{GY_2}+\frac{GX_3}{GY_3}=\frac{3B}{B}=3.$$

검산

- 정삼각형(equilateral triangle)인 경우: 이때 $G=O$이고, G를 지나는 현(chord)은 모두 지름(diameter)이며, 모든 비가 1이다. 공식에서는 $\alpha=\beta=\gamma=-\frac{1}{2}$이므로 $\lambda_1=\frac{9/2}{9/2}=1$이다.
- 기하학적으로 해석할 수도 있다. $A=\frac{1}{2}|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-2\mathbf{x}_1|^2=\frac{9}{2}GX_1^2$이고 $B=\frac{9}{2}(1-OG^2)$이므로, $\lambda_1=B/A$는 $GX_1\cdot GY_1=1-OG^2$를 뜻한다. 이것은 교차하는 현의 정리(intersecting chords theorem), 즉 방멱(power of a point) 정리이다.
- 수치 확인: X_1,X_2,X_3를 각각 0, 1, 2.5 라디안의 각에 놓으면 세 비 GX_i/GY_i는 약 1.13, 0.31, 1.57이 되고, 그 합은 기계 정밀도 범위 안에서 3이다. 같은 방법으로 무작위 삼각형 20 000개를 시험해 보았다.

흔한 실수

- $|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2$이 단순히 $1+1$이 아니라 교차항 2α를 포함한다는 사실을 잊는다.
- 근 $\lambda=-1$을 알아차리지 못하고 근의 공식(quadratic formula)으로 힘들게 계산한다.
- $3+\alpha-2\beta-2\gamma$가 왜 영이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나눈다.

STEP 너머

이 문제에 숨어 있는 항등식 $GX_1 \cdot GY_1 = 1 - OG^2$은 원에 대한 **방멱**이며, 내적 계산은 그 정리의 벡터 증명이다. 길이와 각이 모두 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$에서 나오도록 기하학을 내적으로 표현하는 것은 대학 첫 선형대수(linear algebra) 강의에서 배우는 내적 공간(inner-product space)의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이 관점을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.