풀이

STEP II 2012, 문제 6

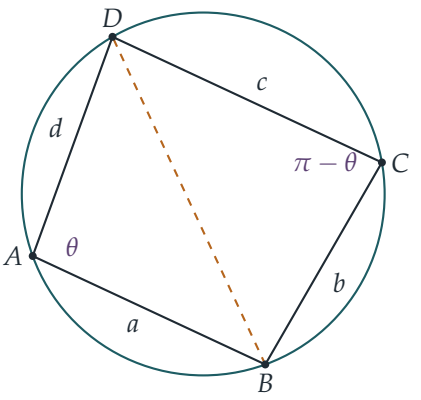
순수수학 • 원에 내접하는 사각형의 넓이

> **STEP II 2012, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q6

핵심 아이디어

대각선 BD는 사각형을 두 삼각형으로 나누고, BD는 코사인 법칙(cosine rule)을 써서 두 가지 방법으로 나타낼 수 있다. 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)이 특별한 것은 마주 보는 두 각의 합이 π라는 점이며, 따라서 C에서의 각은 $\pi - \theta$이다. 그러면 $\cos C = -\cos\theta$이고 $\sin C = \sin\theta$이므로, 코사인 법칙과 넓이 공식 $\frac{1}{2}xy\sin$(끼인각) 모두 하나의 각 θ만으로 나타난다. 그다음은 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$과 꼼꼼한 인수분해(factorising)가 나머지를 해결한다.

풀이



$\cos\theta$와 $\sin\theta$ 구하기

$ABCD$는 원에 내접하므로 마주 보는 두 각 DAB와 BCD의 합은 π이고, 따라서 $\angle BCD = \pi - \theta$이다. 그러므로

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

대각선 BD에 코사인 법칙을 적용하는데, 먼저 삼각형 ABD(두 변 a, d와 끼인각 θ)에서, 다음으로 삼각형 CBD(두 변 b, c와 끼인각 $\pi - \theta$)에서 적용하면

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

$\cos\theta$가 있는 항끼리 모으면 $2(ad+bc)\cos\theta = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$이므로

$$\cos\theta = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}.$$

대각선 BD는 사각형을 이 두 삼각형으로 나누므로, 두 삼각형의 넓이의 합은 Q이다.

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

(모든 변의 길이가 양수이므로 $ad+bc$로 나눌 수 있다.)

$16Q^2$에 대한 공식

두 식을 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

양변에 $4(ad+bc)^2$을 곱하면

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

브라마굽타 공식

우변은 제곱의 차(difference of two squares) $X^2 - Y^2$의 꼴이며, 여기서 $X = 2(ad+bc)$, $Y = a^2+d^2-b^2-c^2$이다.

생각해 보기 $X-Y$와 $X+Y$를 어떻게 일차 인수들의 곱으로 바꿀 수 있을까?

각각이 다시 제곱의 차가 되도록 항들을 묶는다. a, d가 있는 항끼리, b, c가 있는 항끼리 모으면

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

이들을 각각 다시 인수분해하면

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

$2s = a+b+c+d$라 하면, 각 괄호는 $2s$에서 한 변의 두 배를 뺀 것이다. 예를 들어 $b+c+d-a = 2s-2a$이다. 따라서 네 괄호는 $2(s-a), 2(s-d), 2(s-b), 2(s-c)$이고

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{즉,} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

이것이 브라마굽타(Brahmagupta) 공식이다.

삼각형의 넓이

모든 삼각형은 세 꼭짓점이 외접원(circumcircle) 위에 있으므로 원에 내접한다. 이제 D를 원을 따라 A 쪽으로 미끄러뜨려 변 DA의 길이를 0으로 줄여 보자. 그러면 $ABCD$는 세 변이 a, b, c인 삼각형 ABC가 되고 $d = 0$이다. 공식의 양변은 모두 D에 대하여 연속적으로 변하므로, 극한에서도 공식은 여전히 성립한다. $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$라 하면, 삼각형의 넓이 Δ는 다음을 만족한다.

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{따라서} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

이것이 헤론(Heron)의 공식이다.

검산

- 한 변의 길이가 1인 정사각형은 원에 내접하고 $s = 2$이며, $(2-1)^4 = 1$은 그 넓이이다. 세 변이 3–4–5인 삼각형에서는 $s = 6$이고 $\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$이다.
- 직사각형에서는 $a = c$, $b = d$이므로 $\cos\theta = 0$이다. 직사각형의 모든 각은 $\frac{\pi}{2}$이므로 이는 옳다.
- 원 위에 임의의 원에 내접하는 사각형 20 000개를 만들고, $\cos\theta$, $\sin\theta$, Q^2에 대한 공식을 실제 각 및 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 넓이와 비교하였다. 그 결과 오차는 3×10^{-12} 이내로 일치하였다. 헤론의 공식은 임의의 삼각형 1000개에서 맞아떨어졌다.

흔한 실수

- $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$임을 잊는 것. 그러면 $+2bc\cos\theta$가 마이너스로 바뀌어 그 뒤의 모든 계산이 틀어진다.

- $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$을 전부 전개하려는 것. 제곱의 차로 두 번 인수분해하는 편이 훨씬 빠르고 실수할 가능성도 훨씬 적다.

STEP 너머

일반적인(반드시 원에 내접하지는 않는) 사각형의 넓이는 브레치나이더 공식(Bretschneider's formula)으로 구할 수 있다. 이 공식에서는 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$라는 항을 빼는데, 여기서 α와 γ는 마주 보는 한 쌍의 각이다. 따라서 변의 길이가 고정되어 있을 때 원에 내접하는 사각형의 넓이가 가장 크다. 또한 헤론 공식의 인수분해된 꼴을 보면, 삼각부등식(triangle inequality)이 등식이 될 때 정확히 넓이가 0이 된다는 것을 곧바로 알 수 있다. 이런 정신의 기하학을 더 접하고 싶다면 Coxeter와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.