풀이

STEP II 2012, 문제 5

순수수학 • 역수 함수의 그래프 그리기

> **STEP II 2012, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q5

핵심 아이디어

두 곡선 모두 어떤 식의 역수(reciprocal)이므로, 분모의 그래프를 머릿속으로 그린 뒤 뒤집으면 된다. 분모가 영이 되는 곳에서는 수직점근선(vertical asymptote)이 생기고, 분모가 큰 곳에서는 y가 0에 가까우며, 분모의 극점(turning point)은 곡선의 극점이 된다. (ii)에서는 두 이차 인수가 a와 b의 중점에 대해 서로 거울상이므로, 원점을 그 중점으로 옮기면 g는 새 변수의 우함수(even function)가 되고, 정류점(stationary point)은 t^2에 대한 이차식에서 곧바로 얻어진다.

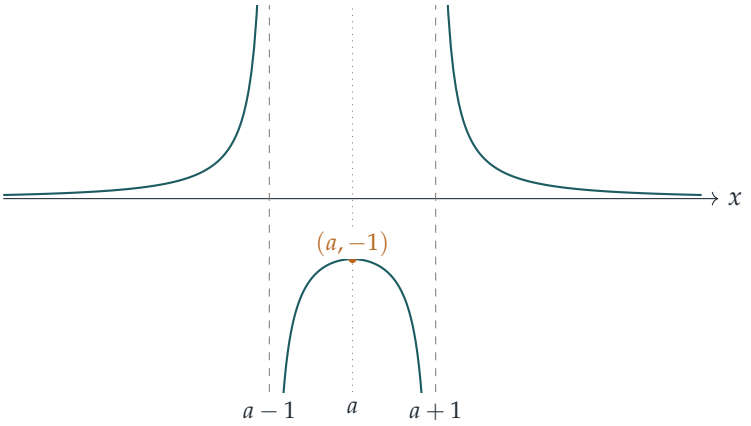
풀이

소문항 (i)

$D(x) = (x-a)^2 - 1$로 두면 $f = 1/D$이다. 분모 D는 포물선(parabola)으로, $x = a$에 대해 대칭이고, $x = a$에서 최솟값 -1을 가지며, $x = a \pm 1$에서 영점을 가진다. 역수의 그래프를 읽어 내면 다음과 같다.

- 곡선은 $x = a$에 대해 대칭이고, 수직점근선은 $x = a \pm 1$이다.
- $|x-a| < 1$이면 $-1 \le D < 0$이므로 $f \le -1$이고, 등호는 $x = a$에서만 성립한다. 따라서 $(a, -1)$은 극대점(local maximum)이고, x가 안쪽에서 $a \pm 1$에 가까워지면 $f \to -\infty$이다.
- $|x-a| > 1$이면 $D > 0$이고 $|x-a|$가 커질수록 D가 증가하므로, f는 양수이며 (점근선 바로 옆의) $+\infty$에서 0을 향해 감소한다. x축은 수평점근선(horizontal asymptote)이고, $|x|$가 크면 $f \approx 1/x^2$이다.

실제로 $f'(x) = -2(x-a)/D^2$는 $x = a$에서만 영이 된다. 곡선은 ($a \neq \pm 1$일 때) y축과 $1/(a^2-1)$에서 만나지만, 그 위치는 a에 따라 달라지므로 그림은 $x = a$를 기준으로 그린다.



소문항 (ii)

$p = (x-a)^2 - 1$, $q = (x-b)^2 - 1$로 두면 $g = 1/(pq)$이다. 이제

$$c = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d = \tfrac{1}{2}(b-a) > 0, \qquad t = x - c,$$

로 놓으면 $x - a = t + d$이고 $x - b = t - d$이다. 그러면 $(t+d)(t-d) = t^2 - d^2$와 $(t+d)^2 + (t-d)^2 = 2t^2 + 2d^2$를 이용하여

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2 - 1\big)\big((t-d)^2 - 1\big) \\ &= (t^2 - d^2)^2 - (2t^2 + 2d^2) + 1. \end{aligned}$$

을 얻는다. 이 식은 t^2에만 의존하므로, g는 a와 b의 중점인 $x = c$에 대해 대칭이다. $u = t^2$, $h(u) = (u - d^2)^2 - 2u - 2d^2 + 1$로 쓰면

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t} = 2t\,h'(u) = 2t\big(2(u - d^2) - 2\big) = 4t\,(t^2 - d^2 - 1).$$

이다. $g' = -(pq)'/(pq)^2$이므로 g의 정류점은 $(pq)' = 0$인 곳, 즉

$$t = 0 \qquad \text{또는} \qquad t = \pm\sqrt{d^2 + 1},$$

이다. 단, 이 점들이 점근선이 아니어야 한다. 점근선은 $t = \pm(d+1)$과 $t = \pm(d-1)$에 있고, $d < \sqrt{d^2+1} < d+1$이므로 바깥쪽 두 정류점은 언제나 진짜 정류점이다. a와 b로 나타내면 후보는

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad \text{그리고} \qquad x = \frac{a+b \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4}}{2}.$$

이다. 그 점들에서의 값은 $h(0) = (d^2-1)^2$와 $h(d^2+1) = 1 - 2(d^2+1) - 2d^2 + 1 = -4d^2$이다.

생각해 보기 이 후보들 가운데 실제로 살아남는 것은 무엇이며, 각각은 극대인가 극소인가?

이는 $t=0$이 점근선과 겹치는지, 즉 $d=1$인지에 달려 있다. 이것이 바로 $b>a+2$ (이때 $d>1$)와 $b=a+2$ (이때 $d=1$)의 경우 구분이다. 각 점의 성질은 다시 미분하는 대신, 점근선 사이의 각 구간에서 g의 부호와 양 끝에서의 거동을 살펴서 판정한다.

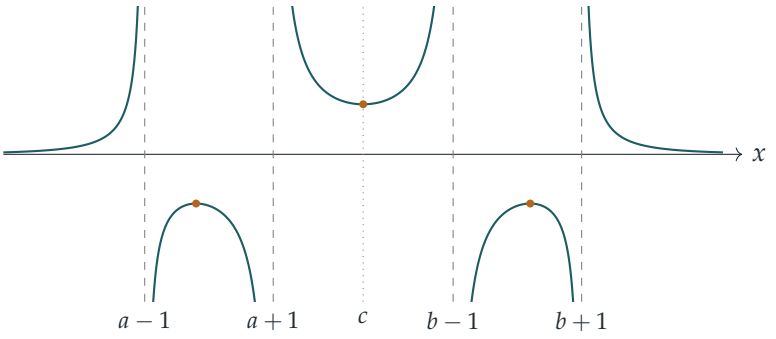
$b>a+2$인 경우. 이제 $d>1$이고, 네 점근선을 차례로 쓰면

$$t=-(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{즉} \quad x=a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

이며, 모두 서로 다르고 c는 $a+1$보다 크고 $b-1$보다 작다.

- **바깥쪽**, $|t|>d+1$: 여기서는 $|x-a|>1$이고 $|x-b|>1$이므로 $p,q>0$이고 $g>0$이다. 정류점이 없으므로 g는 점근선에서의 $+\infty$로부터 무한대에서의 0까지 감소하며, $1/x^4$처럼 행동한다.
- **가운데**, $|t|<d-1$, **즉** $a+1<x<b-1$: 여기서도 $p,q>0$이므로 $g>0$이고, 양 끝에서 $g\to+\infty$이다. 유일한 정류점은 $t=0$이므로 이 점은 극소점(local minimum)이어야 하며, 그 값은 다음과 같다.
$$g(c)=\frac{1}{(d^2-1)^2}=\frac{16}{\left((b-a)^2-4\right)^2}.$$
- **두 틈**, $d-1<|t|<d+1$: $(d-1,d+1)$에 속하는 t에 대해서는 $|x-b|<1$이지만 $x-a>2d-1>1$이므로 $q<0<p$이고 $g<0$이며, 양 끝에서 $g\to-\infty$이다. 이 구간의 유일한 정류점은 $t=\sqrt{d^2+1}$이므로 이 점은 극대점이어야 하며, 그 값은 다음과 같다.
$$g=\frac{1}{-4d^2}=-\frac{1}{(b-a)^2}.$$
틈 $-(d+1)<t<-(d-1)$은 이것의 거울상이다.

따라서 정류점은 세 개이다. $x=\frac{1}{2}(a+b)$에서의 극소점 하나와, $x=\frac{1}{2}\left(a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}\right)$에서의 극대점 두 개이며, 두 극대점에서는 모두 $y=-1/(b-a)^2$이다. 아래 그림은 $b-a=4.8$인 경우이며, 극점이 잘 보이도록 y 방향으로 늘여 그렸다.



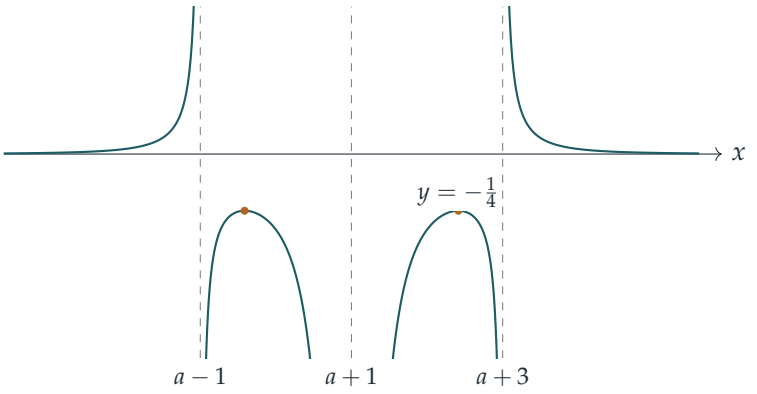
$b = a + 2$인 경우. 이제 $d = 1$이므로 $a + 1 = b - 1 = c$이고, 가운데의 두 점근선이 $x = a + 1$에서 하나로 합쳐진다. $t = x - a - 1$로 두면

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

이므로 점근선은 $x = a - 1, a + 1, a + 3$의 세 개이다. 후보 $t = 0$은 이제 정류점이 아니라 점근선이므로, $t = \pm\sqrt{2}$만 남는다.

- $|t| > 2$이면 앞에서와 마찬가지로 $g > 0$이고, g는 $+\infty$에서 0으로 감소한다.
- $0 < |t| < 2$이면 $g < 0$이고, $t \to 0$일 때(여기서 $g \approx -1/(4t^2)$이므로 양쪽 모두 아래로 내려간다)와 $|t| \to 2$일 때 모두 $g \to -\infty$이다. 따라서 $t = \sqrt{2}$에서의 정류점은 극대점이고, $g = 1/\big(2 \cdot (-2)\big) = -\frac{1}{4}$이다. $t = -\sqrt{2}$에서도 마찬가지이다.

따라서 정류점은 $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$이고, 둘 다 $y = -\frac{1}{4}$인 극대점이다. (이는 일반 공식과 일치한다. $b - a = 2$를 대입하면 $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$이고, $-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$이다.) 이제 곡선은 $x = a - 1$과 $x = a + 3$ 사이에서 x축 위로 결코 올라가지 않는다.



검산

- $a = 0, b = 5$일 때 $g(2.5) = 1/\left((6.25-1)^2\right) = 1/27.5625$이고, 공식 $16/(25-4)^2 = 16/441$도 같은 값, 약 0.0363을 준다. $x = \frac{1}{2}(5+\sqrt{29}) \approx 5.193$에서 직접 계산하면 $g \approx -0.04 = -1/25$이다.
- 첫 번째 경우에서 $b \to a+2$로 보내면 극솟값 $16/\left((b-a)^2-4\right)^2$이 한없이 커지는데, 이는 가운데 가지가 합쳐진 점근선 속으로 사라지는 것과 들어맞는다.
- 임의의 a와 b에 대해 g'의 부호 변화를 수치적으로 조사하면, $b > a+2$일 때는 정확히 세 개, $b = a+2$일 때는 두 개의 정류점이 위에서 구한 위치에서 발견된다.

흔한 실수

- pq를 x에 대한 사차식(quartic)으로 전개한 뒤 삼차식 $(pq)'$를 직접 인수분해하려는 것. 그렇게 해도 되지만, 대칭적인 치환(substitution) $t = x - c$를 쓰면 인수분해가 곧바로 된다.
- $b = a+2$인 경우 점 $x = a+1$이 극점이 아니라 점근선(분모의 이중근)이라는 사실을 잊는 것.
- 틈에서 g의 부호를 잘못 정하는 것. 거기서는 p, q 중 정확히 하나가 음수이므로 $g < 0$이다.

STEP 너머

D로부터 $1/D$를 그리는 것은 함수를 정성적으로 생각하는 방법을 처음 맛보는 일이다. 미적분을 쓰기 전에 부호, 영점, 대칭성, 무한대에서의 거동만으로 거의 모든 것을 알 수 있다. 치환 $t = x - \frac{1}{2}(a+b)$는 대칭성을 이용해 사차식을 t^2에 대한 이차식으로 줄이는 것으로, 대수학과 해석학 전반에 걸쳐 거듭 등장하는 기법이다. 이러한 그림 뒤에 있는 극한과 점근선의 엄밀한 다루기에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*를, 이런 종류의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.