풀이

STEP II 2012, 문제 4

순수수학 • 로그 급수 부등식

> **STEP II 2012, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q4

핵심 아이디어

모든 것은 $\ln(1+x)$의 급수(series)와 e^t가 증가함수(increasing function)라는 사실에서 나온다. $(1+\frac{1}{n})^n$을 e와 비교하려면 로그(logarithm)를 취하면 된다. 즉 $n\ln(1+\frac{1}{n})$을 1과 비교해야 한다. 항의 크기가 점점 줄어드는 교대급수(alternating series)는 두 항씩 괄호로 묶어서 첫째 항보다 작음을 보일 수 있다. 한편 $\ln\frac{1+x}{1-x}$라는 조합에서는 음의 항이 모두 사라지므로 이 값은 첫째 항보다 크다. 두 경계 사이에 끼워 넣으면 극한(limit)을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$n>1$이고 $k\geq 1$이므로 $(k+1)n>n>1$이고, 당연히 $(k+1)n>k$이다. 양변에 $n^k>0$을 곱하면

$$(k+1)n^{k+1}>kn^k>0,$$

이고, 이 양수들의 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}<\frac{1}{kn^k}.$$

이제 급수에 $x=\frac{1}{n}$을 대입한다. $n>1$이면 $0<x<1$이므로 대입할 수 있다. 첫째 항 뒤의 항들을 두 개씩 묶으면

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)-\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}\right)-\cdots.$$

각 괄호는 k가 짝수일 때 $\frac{1}{kn^k}-\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$의 꼴이므로, 방금 증명한 부등식에 의해 엄밀히 양수이다.

? 생각해 보기 무한급수를 이렇게 괄호로 묶어도 될까?

된다. 급수가 수렴(converge)하기 때문이다. 항의 개수가 홀수인 부분합(partial sum)들은 전체 부분합들의 부분수열(subsequence)을 이루므로 같은 극한 $\ln(1+\frac{1}{n})$으로 수렴한다. 괄호로 묶은 급수는 바로 이 홀수 개 항의 부분합들의 수열이다.

괄호로 묶은 급수의 부분합은 $\frac{1}{n}-b_1$, $\frac{1}{n}-b_1-b_2$, ...이고, 여기서 모든 $b_j>0$이다. 이 부분합들은 감소하므로 모두 $\frac{1}{n}-b_1$ 이하이고, 따라서 그 극한도 그러하다.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}-b_1<\frac{1}{n},\qquad b_1=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}>0.$$

(b_1을 따로 떼어 두었기 때문에 마지막 부등식이 엄밀한 부등식이 된다. 그렇지 않으면 $\frac{1}{n}$보다 작은 수들의 극한이 $\frac{1}{n}$과 같을 수도 있다.)

양변에 $n>0$을 곱하면 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1$, 즉 $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)<1$이다. 지수함수(exponential function)는 증가함수이므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

소문항 (ii)

$x=\frac{1}{2y}$라 하자. $y>\frac{1}{2}$이므로 $0<x<1$이고, 따라서 x와 $-x$ 모두 급수가 성립하는 범위에 있다.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

항별로 빼면(수렴하는 두 급수이므로 정당하다) 짝수 차수의 항은 소거되고 홀수 차수의 항은 두 배가 된다.

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

이제

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}}=\frac{2y+1}{2y-1},$$

이므로, $2x=\frac{1}{y}$를 이용하면

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)=\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}+\frac{2}{5(2y)^5}+\cdots=\frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

첫째 항 이후의 모든 항은 엄밀히 양수이므로($y>0$이므로) 둘째 부분합부터는 모두 $\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}$ 이상이다. 따라서

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)\ge\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}>\frac{1}{y},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

결론을 이끌어 내기 위해 분수가 $1+\frac{1}{n}$이 되도록 y를 고른다. $y=n+\frac{1}{2}$로 잡으면(모든 양의 정수 n에 대해 $\frac{1}{2}$보다 크다)

$$\frac{2y+1}{2y-1}=\frac{2n+2}{2n}=1+\frac{1}{n},$$

이므로

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

양변에 $n+\frac{1}{2}>0$을 곱하면 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n})>1$이고, 지수를 취하면(역시 증가함수이므로)

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

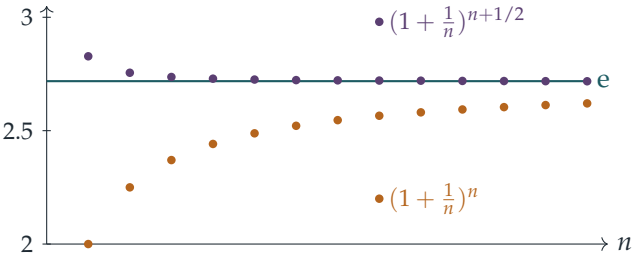
소문항 (iii)

소문항 (ii)의 결과를 $(1+\frac{1}{n})^{1/2}>0$으로 나누고 소문항 (i)과 합치면, $n\geq 2$인 모든 정수 n에 대해

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}.$$

$n\to\infty$일 때 $1+\frac{1}{n}\to 1$이므로 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$이고(제곱근 함수는 연속(continuous)이다), 좌변은 e로 수렴한다. 우변은 상수 e이다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의해

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to\mathrm{e}.$$



검산

$n=10$일 때 $(1.1)^{10}\approx 2.5937$이고 $(1.1)^{10.5}\approx 2.7203$이므로, 실제로 $\mathrm{e}\approx 2.7183$을 사이에 둔다. $n=1000$일 때 하한 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001}\approx 2.7169237$은 $(1.001)^{1000}\approx 2.7169239$보다 아주 조금 작으며, 이는 조임이 얼마나 빡빡한지 보여 준다. 또한 수천까지의 모든 n에 대해 두 엄밀

한 부등식을 확인했고, 임의의 $y > \frac{1}{2}$에 대해 소문항 (ii)의 급수의 합이 $\ln \frac{2y+1}{2y-1}$이 됨을 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $x = 1$을 대입하는 것: 급수는 $|x| < 1$에서만 주어지므로 그곳에서 $n > 1$이 필요하다(소문항 (iii)에서는 큰 n만 쓰므로 잃는 것은 없다).
- 엄밀한 부등식들의 극한에서 곧바로 엄밀한 부등식을 결론 내리는 것. 극한은 $\leq$만 보존한다. $<$를 얻으려면 양의 항 하나를 따로 떼어 두어야 한다.
- 지수를 취해도 부등식이 보존되는 이유가 e^t가 증가함수이기 때문이라는 점을 잊는 것. 이 점을 분명히 밝혀야 한다.

STEP 너머

이 경계들은 극한 이상의 것을 보여 준다. $(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1 + \frac{1}{2n}$이므로 오차 $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$의 크기는 대략 $\mathrm{e}/(2n)$이고, 따라서 이 수열은 꽤 느리게 수렴한다. 수렴하는 급수의 항을 재배열하는 것, 부분합을 비교하는 것, 조임 정리는 대학 첫 해석학(analysis) 과목의 기본 중의 기본이며, 그 과목에서는 미묘한 점들도 만나게 된다(조건수렴(conditionally convergent)하는 급수의 항을 재배열하면 합이 바뀔 수 있다!). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 모든 내용을 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.