풀이

STEP II 2012, 문제 3

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2012, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q3

핵심 아이디어

다루기 까다로운 식 $x+\sqrt{1+x^2}$는 t로 놓아 달라고 외치고 있는 셈이다. 이 치환(substitution)이 잘 통하는 비결은 그 역수(reciprocal)가 $\sqrt{1+x^2}-x$라는 데 있다. 따라서 t와 $1/t$를 더하고 빼면 x와 $\sqrt{1+x^2}$가 모두 t의 간단한 함수로 나타난다. 그다음에는 두 적분 각각에서 피적분함수(integrand)를 $x+\sqrt{1+x^2}$만의 함수로 쓰는 방법을 찾아내기만 하면 된다.

풀이

항등식

$t=x+\sqrt{1+x^2}$라 하자. 켤레(conjugate)를 곱하면

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

이 두 식을 빼고 더하면

$$x=\tfrac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big).$$

이 가운데 첫 번째 식은 x를 곧바로 t의 함수로 나타내므로

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

적분 구간을 보면, $x=0$일 때 $t=1$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이다. 또 t는 x에 대한 순증가함수이므로($x\geq 0$에서 x와 $\sqrt{1+x^2}$가 모두 증가한다) 이 치환은 $[0,\infty)$에서 일대일(one-to-one)이다. 따라서

$$\int_0^\infty f(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

첫 번째 적분

생각해 보기 분모 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$이 어떻게 $x+\sqrt{1+x^2}$의 함수가 될 수 있을까?

제곱해 보자. $(x+\sqrt{1+x^2})^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$이고, 이것은 정확히 분모이다. 따라서 피적분함수는 $f(t)=1/t^2$에 대한 $f(x+\sqrt{1+x^2})$이고, 항등식(identity)에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-2}+t^{-4})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

두 번째 적분

$x=\tan\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, 즉 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$이다. θ가 0부터 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 x는 0부터 ∞까지 변한다. $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\theta>0$이고, 따라서 $\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$이며

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad 1+\sin\theta = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

이다. 여기서도 $t=x+\sqrt{1+x^2}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

생각해 보기 피적분함수에 아직 $\sqrt{1+x^2}$가 남아 있다. 이것을 어떻게 t로 나타낼까?

이미 첫 부분에서 구했다. $\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$이다. 따라서 피적분함수는

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3} = \tfrac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4}),$$

로, $t=x+\sqrt{1+x^2}$만의 함수이다. $f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$로 두고 항등식을 적용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty (t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

검산

- 간단한 f로 항등식을 확인해 보자. $f(t) = 1/t^3$이면 우변은 $\frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3} + t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$이고, 좌변을 수치 적분(numerical quadrature)으로 계산해도 0.375가 나온다.
- 원래의 두 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.666667과 0.466667이 나와 $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$와 일치한다.
- 크기에 대한 상식적인 확인: $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 피적분함수 $1/(1+\sin\theta)^3$은 1에서 $\frac{1}{8}$로 감소하므로 적분값은 $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$과 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ 사이에 있다. 값 $\frac{7}{15} \approx 0.47$은 이 범위 안에 여유 있게 들어간다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$를 구한 다음 그것을 힘들게 t로 나타내려 하는 것. 먼저 x를 t의 함수로 쓰고 그것을 미분하는 편이 훨씬 빠르다.
- 두 번째 적분에서 $\mathrm{d}\theta$에서 나오는 인수 $1/(1+x^2)$을 빠뜨리거나, 피적분함수의 $\sqrt{1+x^2}$를 $\frac{1}{2}(t+1/t)$로 바꾸지 않고 그대로 두는 것.

STEP 너머

치환 $t = x + \sqrt{1+x^2}$는 사실 $x = \sinh u$일 때의 $t = \mathrm{e}^u$이다. 실제로 $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$이고, 공식 $x = \frac{1}{2}(t - 1/t)$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(t+1/t)$는 $\sinh u$와 $\cosh u$를 지수함수로 쓴 것에 불과하다. 이와 같은 쌍곡선 치환(hyperbolic substitution)은 $\sqrt{1+x^2}$가 들어 있는 적분을 다루는 대학 1학년 과정의 표준 도구이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 STEP 적분 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.